Carte Școlară

PROBLEME DE MATEMATICĂ PENTRU CLASELE V-VIII

C. BASARAB
I. NANU
L. NICULESCU
I. PĂTRAȘCU
N. TĂLĂU
D. SECLĂMAN

* ediția a II-a *

EDITURA CARDINAL

Scanned with OKEN Scanner

prof. CONSTANTIN BASARAB
prof. LILIANA NICULESCU
prof. NICOLAE TĂLĂU
prof. ION NANU
prof. ION PĂTRAȘCU
prof. DAN SECLĂMAN

PROBLEME DE MATEMATICĂ PENTRU CLASELE V - VIII

*** ediția a II-a ***

◆

Bădulescu Mihaela

Editura Cardinal
CRAIOVA

Scanned with OKEN Scanner

Tehnoredactare computerizată:
Daniela Marin & Constanța Nicolae

I.S.B.N. 973-97283-7-5

Copyright © **Editura Cardinal**
All rights reserved

Scanned with OKEN Scanner

PREFAȚĂ

Organizată pe clasele ciclului gimnazial, împărțită pe capitole, lucrarea acoperă, prin cele **peste 2000 de probleme propuse**, întreaga programă actuală de matematică, fiind astfel un instrument util în fixarea noțiunilor din clasă.

Lucrarea se adresează tuturor **elevilor din clasele V-VIII** oferind în fiecare capitol *un număr mare de probleme dispuse gradat, începând cu problemele de mică dificultate și ajungând până la probleme mai dificile* în finalul fiecărui capitol.

Pentru elevii care se pregătesc în vederea susținerii examenului de admitere în liceu sunt propuse **40 de teste pentru promovarea examenului de capacitate și admitere în liceu** reprezentând *40 de posibile subiecte.*

Lucrarea este, deci, un instrument complet, pentru elevii claselor V-VIII, de lucru permanent, *fiecare lecție de matematică din clasă având corespondentul în culegere* prin problemele propuse.

În partea a doua a lucrării se oferă **răspunsuri, indicații sau soluții complete** la problemele propuse în prima parte a lucrării.

Având convingerea că lucrarea va fi apreciată pentru utilitatea și calitatea ei, recomandăm parcurgerea lucrării în ordinea prezentată.

Prezenta ediție a culegerii a ținut seama de modificările intervenite în ultimii ani în programele analitice și, printr-un număr însemnat de noi probleme, răspunde tuturor cerințelor actualelor programe de matematică.

AUTORII

Scanned with OKEN Scanner

CUPRINS

PARTEA I ENUNŢURI

A. PROBLEME TEME PENTRU CLASELE V-VIII

Clasa a V-a

Cap. I - Numere naturale 5
Cap. II - Mulţimi 14
Cap. III - Divizibilitate 17
Cap. IV - Numere raţionale pozitive 21

Clasa a VI-a

Cap. I - Rapoarte, proporţii, procente 26
Cap. II - Numere întregi 33
Cap. III - Numere raţionale 37
Cap. IV - Rădăcina pătrată 42
Cap. V - Introducere în geometrie 45
Cap. VI - Unghiuri 48
Cap. VII - Triunghiul 53
Cap. VIII - Drepte paralele 58

Clasa a VII-a

Cap. I - Numere reale 62
Cap. II - Ecuaţii şi sisteme de ecuaţii 66
Cap. III - Patrulatere 74
Cap. IV - Segmente proporţionale, asemănarea triunghiurilor . . 82
Cap. V - Relaţii metrice 86
Cap. VI - Cercul 90
Cap. VII - Poligoane regulate 94
Cap. VIII - Arii 96

Clasa a VIII-a

Cap. I - Numere reale 102
Cap. II - Intervale, inecuaţii şi sisteme de inecuaţii 106
Cap. III - Funcţii 114
Cap. IV - Polinoame 118
Cap. V - Fracţii raţionale 125
Cap. VI - Introducere în geometria în spaţiu 130
Cap. VII - Paralelism în spaţiu 132
Cap. VIII - Perpendicularitate în spaţiu 135
Cap. IX - Prisma 140
Cap. X - Piramida 143
Cap. XI - Trunchiul de piramidă 147
Cap. XII - Corpuri rotunde 149

B. TESTE *pentru promovarea examenului de capacitate şi admitere în liceu* 156

PARTEA a II-a SOLUŢII INDICAŢII ŞI RĂSPUNSURI 182

Scanned with OKEN Scanner

Scanned with OKEN Scanner

PARTEA I

ENUNȚURI

A. PROBLEME • TEME • PENTRU CLASELE V - VIII

clasa a V-a

CAP. I. • NUMERE NATURALE •

1. Scrieți folosind cifre arabe numerele: a) trei sute opt; b) patru mii șapte sute cincizeci și șase; c) cincizeci și două de mii trei; d) șase sute trei mii doisprezece; e) șapte milioane două sute treizeci și unu de mii cinci sute patru; f) un miliard un milion o sută unu; g) două trilioane treizeci și două de miliarde patru sute treizeci și două de milioane cinci; h) zece trilioane zece milioane zece mii zece.
2. Citiți numerele următoare: a) 7007 ; b) 10010 ; c) 204001 ; d) 3041020 ; e) 10010010 ; f) 123321029; g) 1010001010; h) 23002300123; i) 450045000450; j) 1200002300034.
3. Treceți în tabelul de mai jos respectând ordinele și clasele numerele: 307; 10422; 1805771; 31003103; 190903024; 34000034005; 1022033044050; 123456789101112.

Clasa trilioanelor			Clasa miliardelor			Clasa milioanelor			Clasa miilor			Clasa unităților		
S	Z	U	S	Z	U	S	Z	U	S	Z	U	S	Z	U

4. Citiți numerele următoare și precizați ce semnifică fiecare cifră în funcție de poziția pe care o ocupă: a) 1001 ; b) 80808 ; c) 754010 ; d) 3330333 ; e) 10101010 ; f) 120003045 ; g) 1230456078 ; h) 54321012345 ; i) 100023400015 ; j) 9081726354000 .

5. Câte cifre are un număr natural a cărui primă cifră din stânga reprezintă: a) sute; b) zeci de mii; c) unități de milioane; d) sute de miliarde; e) zeci de trilioane.

6. Câte zeci, câte sute, câte zeci de mii, câte sute de mii și câte milioane sunt în fiecare dintre numerele următoare: a) 217802; b) 1035812; c) 10203040; d) 303030030; e) 4003002001.

7. Scrieți în ordine crescătoare numerele: 111021; 11102; 111210; 111201; 111120; 111012.

8. Scrieți în ordine descrescătoare numerele:
2020202 ; 2020220 ; 2022002 ; 2022200 ; 2022020 ; 2020022.

9. Determinați pe cel mai mare și pe cel mai mic număr natural de șapte cifre care au cifra milioanelor 9 și cifrele nenule și diferite.

10. a) Câte numere de șase cifre au ultimele cinci cifre identice.
b) Câte numere de șapte cifre au primele cinci cifre identice.

11. Scrieți cinci numere naturale consecutive știind că unul dintre ele este 1996.

12. a) Determinați cel mai mic număr natural de patru cifre care are exact două cifre identice.
b) Determinați cel mai mare număr natural de cinci cifre care are una din cifre 5.

13. a) Scrieți numerele impare cuprinse între 19998 și 20008.
b) Scrieți numerele pare cuprinse între 599997 și 600007.

14. Aflați câte numere pare și câte numere impare sunt în șirul numerelor naturale nenule până la 1996 inclusiv. Dar până la 2001 inclusiv.

15. Aflați care este în șirul numerelor naturale nenule al 10-lea număr par ? Dar al 100-lea număr impar ?

16. Precizați pozițiile pe care se află numerele 7; 19; 25; 31; 43 în șirul numerelor naturale impare.

17. Scrieți în ordine crescătoare numerele naturale a, b, c, d, e știind că:
$$c \geq e \; ; \; c \leq a \; ; \; d \geq a \; ; \; d \leq b.$$

18. Efectuați folosind proprietățile de asociativitate și comutativitate ale operației de adunare:
a) $12 + 23 + 34 + 45 + 56 + 67 + 78 =$;
b) $123 + 132 + 213 + 231 + 168 + 87 + 177 + 69 =$;
c) $1011 + 1022 + 1035 + 1044 + 1056 + 1065 + 1078 + 1089 =$;
d) $5489 + 5478 + 5456 + 5435 + 5411 + 5422 + 5444 + 5465 =$.

19. Efectuați: a) $101010 + 455445 + 444555 + 998990 =$;
b) $379735 - 219437 + 1863456 - 1023754 =$;
c) $2079985 - 908809 - 809908 + 638732 =$.

20. Reconstituiți operațiile următoare:

a) $\begin{array}{r} 2*34+ \\ *56* \\ \hline *111 \end{array}$; b) $\begin{array}{r} 42*8+ \\ 8561 \\ *42* \\ \hline *624 \end{array}$; c) $\begin{array}{r} 43060- \\ ***** \\ \hline 35496 \end{array}$; d) $\begin{array}{r} *1*0*- \\ *567 \\ \hline 25*4 \end{array}$.

21. Completați pătrățelele următoare cu numerele care lipsesc, încât să obțineți pătrate magice (*suma numerelor de pe fiecare linie, fiecare coloană și fiecare diagonală să fie aceeași*):

a)
16		3	13
	11		4
	7	6	
4			1

;

b)
18	3		6
8		11	20
	16	12	
21			

;

c)
73		69	52	51
		59	66	
55	65	63		
	60		62	72
75		57		53

;

d)
51	75	69		57
	58		71	70
52		65	59	
60	54		67	
		56		74

Scanned with OKEN Scanner

22. Puneți paranteze în fiecare din exercițiile următoare pentru a obține rezultatul zero:
a) $505 - 414 - 323 - 232 =$; c) $404 - 313 - 222 - 131 =$;
b) $550 - 441 - 332 - 223 =$; d) $440 - 331 - 222 - 113 =$.

23. Efectuați: a) $637 + \{512 + [201 + (1351 + 449 + 50) + 799]\} - 3999 =$;
b) $3001 - \{204 + [512 + (449 + 353) + (551 + 647)] + 284\} =$.

24. Efectuați:
a) $20000 - \{1921 - [1929 - (1020 - 920 - 92)]\} - 19992 =$;
b) $19462 - \{6231 - [2914 - (1987 - 321 - 641) - 1791] - 1399\} - 14719 =$.

25. a) Calculați: $a - [b + (c + d)]$ pentru $a = 9413$; $b = 2614$; $c = 1215$; $d = 5580$.
b) Calculați: $a - [b - (c + d)]$ pentru $a = 11577$; $b = 13415$; $c = 1814$; $d = 27$.

26. Folosind numerele 996, 1835 și 3239 o singură dată fiecare și semnele operațiilor de adunare și scădere alcătuiți exerciții care să aibă rezultatul: a) 408 ; b) 2400 ; c) 6070.

27. Aflați numerele a, b, c, d care satisfac simultan condițiile: $a + b + c = 221928$; $b + c + d = 2219988$; $a + b + c + d = 2221984$ și $c + d = 2001992$.

28. Verificați care dintre numerele: 134, 99, 1019, 139 trebuie puse în locul lui x astfel încât:
$$3245 - 1891 - (x + 1215) = 100.$$

29. Aflați suma a zece numere naturale știind că fiecare începând cu al doilea se obține adunând numărul precedent cu 16, iar al șaselea număr este 90.

30. Aflați suma a cinci numere pare consecutive știind că unul dintre ele este 1996.

31. Aflați suma a cinci numere impare consecutive știind că două dintre ele sunt 1995 și 1997.

32. Aflați numărul natural x știind că:
a) $\{1345 + [2914 + (x - 100)]\} - 329 = 9999$;
b) $7257 - \{[x - 1 + (3456 - 1819)] - 9841\} = 0$.

33. Efectuați: $(2 + 4 + 6 + \ldots + 1000) - (1 + 3 + 5 + \ldots + 999) =$.

34. Aflați suma tuturor numerelor de două cifre cu ambele cifre pare și comparați-o cu suma tuturor numerelor de două cifre cu ambele cifre impare.

35. Aflați suma tuturor numerelor de patru cifre care se pot forma cu cifrele 0, 1, 2 și care au exact două cifre identice.

36. a) Aflați suma numerelor naturale cuprinse între 1 și 1000 care conțin cifra 2 de două ori.
b) Aflați suma numerelor de la 1000 la 10000 care conțin cifra 3 de 3 ori.

37. Arătați că: $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 \cdot 9 = 1 + 2 \cdot 3 + 4 \cdot 5 - 6 + 7 +$
$+ 8 \cdot 9 = 1 + 2 \cdot 3 + 4 + 5 + 67 + 8 + 9 = 1 \cdot 2 + 34 + 56 + 7 - 8 + 9$.

38. Efectuați: a) $2 + 2 \cdot \{2 + 2 \cdot [2 + 2 \cdot (2 - 2 : 2)]\} =$;
b) $3 \cdot 33 - 3 \cdot \{3 + 3 \cdot [3 + 3 \cdot (3 - 3 : 3)]\} =$;
c) $1 + 2 \cdot \{3 + 4 : [5 - 6 : (7 - 8 : 8)]\} =$.

39. Efectuați:
a) $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 - (1 + 2 + 3 + 4 + 5) =$;
b) $9 \cdot \{8 + 7 \cdot [6 + 5 \cdot (4 + 3 \cdot 2 \cdot 1)]\} : (9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1) =$.

40. Reconstituiți operațiile următoare:

a) $\begin{array}{r} 451\times \\ **\\ \hline 4059 \\ \hline 4059 \\ \hline *****\end{array}$; b) $\begin{array}{r} 761\times \\ **\\ \hline ****\\ \hline 6088 \\ \hline ****5\end{array}$; c) $\begin{array}{r} **5\times \\ 4*\\ \hline *15\\ \hline *6* \\ \hline 47**\end{array}$; d) $\begin{array}{r} 22*\times \\ 2*\\ \hline ***\\ \hline *** \\ \hline ***2\end{array}$.

Scanned with OKEN Scanner

41. Efectuați: a) $4 + 9 \cdot 123$; b) $5 + 9 \cdot 1234$; c) $6 + 9 \cdot 12345$.

42. Efectuați: a) $5 + 9 \cdot 987$; b) $4 + 9 \cdot 9876$; c) $3 + 9 \cdot 98765$.

43. Efectuați:

a) $(12345 + 54321 + 98765 + 56789) \cdot (8765 - 6789 + 2345 - 4321)$;

b) $(98765 - 56789 + 12345 - 54321) \cdot (2345 + 4321 + 8765 + 6789)$.

44. Scoateți factor comun și efectuați:

a) $9876 \cdot 479 + 9876 \cdot 312 + 209 \cdot 9876 =$;

b) $237 \cdot 8973 + 8973 \cdot 345 - 482 \cdot 8973 =$;

c) $1863 \cdot 3861 - 1863 \cdot 1683 - 1863 \cdot 2178 =$.

45. Scoateți factor comun și efectuați:

a) $11 + 22 + 33 + \ldots + 99 =$;

b) $101 + 202 + 303 + \ldots + 909 =$;

c) $111 + 222 + \ldots + 999 - (101 + 202 + \ldots + 909) =$.

46. Efectuați:

$(1994 \cdot 1995 + 1995 \cdot 1996 + 1996 \cdot 1997) \cdot (64 \cdot 105 - 24 \cdot 35 - 49 \cdot 120) =$.

47. Știind că $a = 256$ și $b + c = 25$ calculați $ab + ac$.

48. Știind că $b - c = 333$ și $a = 11$, calculați $ab - ac$.

49. Diferența numerelor $23456 \cdot x$ și $1234 \cdot x$ este egală cu diferența numerelor 23456 și 1234. Aflați numărul x.

50. Precizați cum se modifică produsul a două numere naturale dacă:

a) primul se mărește de 2 ori, iar al doilea rămâne neschimbat.

b) primul rămâne neschimbat, iar al doilea se triplează.

c) primul se mărește de 2 ori, iar al doilea se mărește de 3 ori.

d) primul se mărește cu o unitate, iar al doilea rămâne neschimbat.

51. Folosind operațiile de adunare, scădere, înmulțire obțineți:

a) numărul 775 din numerele 3, 4, 7, 25 luate fiecare o singură dată.

b) numărul 1250 din numerele 4, 9, 10, 25 luate fiecare o singură dată.

52. Aflați ultima cifră a numărului:

$1 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 2 \cdot 3 + 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 + 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 + \ldots + 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 100$.

53. Aflați ultimele două cifre ale numărului: $1990 \cdot 1991 \cdot 1992 \cdot \ldots \cdot 1998 \cdot 1999$.

54. a) Aflați numerele naturale de forma $3 \cdot n + 1$ mai mici decât 20.

b) Aflați numerele naturale de două cifre de forma $4n + 2$ mai mari decât 80.

c) Aflați numerele naturale de forma $5 \cdot n + 3$ cuprinse între 20 și 80.

55. Comparați numerele:

a) $(1 + 2 + 3 + \ldots + 10) \cdot 9$ și $(1 + 2 + 3 + \ldots + 9) \cdot 10$;

b) $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 10$ și $1 + 2 + 3 + \ldots + 1000$;

c) $1 + 3 + 5 + \ldots + 99$ și $(1 + 2 + 3 + \ldots + 99) : 2$.

56. Ordonați crescător numerele: $2 \cdot n + 1$; $3 \cdot n + 2$; $2 \cdot n + 3$; $n + 2$, unde n este număr natural, $n \geq 2$.

57. Ordonați descrescător numerele: $2 \cdot n - 1$; $n - 2$; $2 \cdot n - 3$; $3 \cdot n - 2$, unde n este număr natural $n \geq 2$.

58. Efectuați: a) $10100 : 100$; b) $9025 : 25$; c) $16016 : 16$; d) $1000000 : 125$; e) $946053 : 947$; f) $111111 : 8547$; g) $222222222 : 18$; h) $24019801 : 4901$.

59. Completați tabelul următor știind că a, b, q, r sunt respectiv deîmpărțitul, împărțitorul,

Scanned with OKEN Scanner

câtul și restul unei împărțiri.

a	b	q	r
23734	234		
123734	1234		
	1111	1111	0
	19753	45	3
700000		1234	322
7777777		17517	229

60. Arătați că: a) $999999 : 63 = 888888 : 56$;
b) $444444444 : 36 = 333333333 : 27$;
c) $777777777777 : 147 = 555555555555 : 105$.

61. Aflați numărul x știind că:
a) $\{[(1991 + x) : 1992 + 1993] : 1994 + 1995\} : 1993 = 1$;
b) $\{[(x : 1992 + 1992) : 1993 + 1993] : 1994 + 1994\} : 1995 + 1995 = 1996$.

62. Reconstituiți operațiile următoare:

a)
```
1 * * 7 * 8 | * 1 2
* * * *     | 9 8 *
= = * * *   |
    * * *   |
    * * * 8 |
    * * * 8 |
    = = = = |
```
;

b)
```
* * * 2 | 2 2 *
* * 2   | 2 *
= 4 * 2 |
  * * 2 |
  = = = |
```

63. Arătați că numerele: a) 1155, 111555, 11115555, se pot scrie ca produsul a două numere impare consecutive; b) 4488, 444888, 44448888, se pot scrie ca produsul a două numere pare consecutive.

64. Arătați că: $(1 + 2 + 3 + ... + 1996) : (1 - 2 + 3 - 4 + ... - 1994 + 1995)$ este număr natural.

65. Puneți paranteze astfel încât:
a) $4 + 8 \cdot 3 + 1 \cdot 2 = 74$; b) $1 + 2 : 3 + 4 : 5 + 6 : 7 = 1$.

66. Determinați numerele naturale care împărțite la 9 sau câtul egal cu restul.

67. Aflați numerele naturale care împărțite la 7 dau câtul 211.

68. Câte numere naturale de patru cifre se împart exact la 1222 ?

69. Aflați pe cel mai mare și pe cel mai mic număr natural de trei cifre care împărțit la un număr de o cifră dă restul 7.

70. Câte numere naturale de trei cifre împărțite la 13 dau restul 10.

71. Aflați numerele naturale mai mici sau egale cu 100 care împărțite la 13 dau câtul egal cu dublul restului.

72. Aflați numerele care împărțite la 11 dau câtul 101 și conțin o singură dată cifra 2.

73. Câtul unei împărțiri este 5, iar restul 28. Aflați deîmpărțitul și împărțitorul știind că suma dintre deîmpărțit, împărțitor, cât și rest este 283.

74. Aflați numărul natural cu ultimele două cifre zero care împărțit la 67 dă câtul 129.

75. Aflați numerele de patru cifre care împărțite la un număr de două cifre dau câtul mai mic sau egal cu 11 și restul 97.

76. Arătați că oricum am alege patru numere naturale diferite există două dintre ele a căror di-

Scanned with OKEN Scanner

ferență se împarte exact la 3.

77. Efectuați: a) 2^3+3^2; b) 2^4+4; c) 2^0+0^2; d) $3^0\cdot 5^2$;
e) $1^3\cdot 3^3$; f) $1^{77}:17^0$; g) $2\cdot 2^2:2^3$; h) $3^3:3^2\cdot 3$;
i) $7^4:7^2+7^2$; j) $2^3+3^2-2^4-1^5$;
k) $\left[(3+2)^3-(3-2)^3\right]^0$; l) $\left[4+(6-5)^6\right]^3:5^2$;
m) $\left(1^7\cdot 2^2\right)^2+10^3-10^2$; n) $\left[\left(6^2:3^2+2^2\cdot 5^2\right):2^0\right]\cdot 2^{2^0}$.

78. Comparați numerele: a) 0^4 și 4^0; b) 1^4 și 4^1; c) 2^3 și 3^2;
d) 2^4 și 4^2; e) 2^5 și 5^2; f) 3^4 și 4^3; g) 2^7 și 7^2.

79. Aflați numărul x știind că: a) $2^x=16$;
b) $4^x=8^{28}$;
c) $32^{16}=16^x$;
d) $3^5\cdot 3^6\cdot 3^x=3^{20}$;
e) $(2^x)^4=2^{40}\cdot\left(2^3\right)^2$;
f) $\left(3^2\right)^5:3^x=\left(3^2\right)^3$.

80. Comparați numerele: a) 2^{10} și 8^3; b) 32^{20} și 16^{25}; c) 9^3 și 27^2;
d) 2^9 și 3^6; e) 2^{45} și 3^{30}; f) 3^{100} și 2^{150}.

81. Efectuați: a) $3^2-3^2:\left(2^5-2^4-2^3-2^2-2^1+2^0\right)$;

b) $2\cdot 2^2\cdot 2^{2^2}:\left[2+2^2+2^{2^2}:\left(2^{2^2}-2^2\cdot 2\right)\right]$;

c) $\left[2^{12}\cdot 2^{18}+5^{70}:5^{10}-\left(3^{25}\right)^2\right]:\left[4^2\cdot 2^3\cdot 2^{23}+\left(5^{15}\right)^{2^2}-\left(3^2\right)^{5^2}\right]$.

82. Arătați că: $\left(1^1+2^2+3^3\right):2^5=\left(3^2+4^2\right):5^2$.

83. Efectuați: a) $\left[\left(5-2^2\right)^{10}+\left(17-2^4\right)^{13}\right]^5$;

b) $\left(9-2^6:2^3\right)^{100^5}$; c) $6^{13}:\left(2^{13}\cdot 3^{13}\right)$;
d) $\left(25^2:5^4\right)^{1996}$; e) $\left(5^3\right)^4\cdot\left(2^4\right)^3-\left(10^2\right)^6$;
f) $\left(22^4-4^2\cdot 11^4\right)\cdot 13^{2^{10}}$; g) $\left(2^5:2^3\right)^{10}\cdot 25^{10}-10^{20}$.

84. Efectuați: a) $\left(12^5\cdot 12^7:12^{12}+10^5-1\right)^4:\left(2^{20}\cdot 5^{20}\right)$;

b) $\left\{\left[\left(3^7+3^8+3^9+3^{10}\right):3^7-1\right]:3-1\right\}:3$;

c) $\left\{\left[\left(11^2+2^2\right):5\right]^4-5^8\right\}^{100}$;

d) $\left\{\left[\left(15^2-10^2-2^2\right):11\right]^{10}:11^{10}\right\}^{1996}$.

Scanned with OKEN Scanner

85. Comparați numerele:
a) 6^4 și $2^4 \cdot 3^4$; b) 6^4 și 2^4+3^4; c) 5^4 și 2^4+3^4;
d) 2^2+11^2 și 15^2-10^2; e) 2^{2^3} și $\left(2^2\right)^3$; f) 2^{3^2} și $\left(2^3\right)^2$.

86. a) Aflați numărul x știind că: $\left(5^3-10^2\right)^2=5^x$;
b) Aflați numărul y știind că: $\left(2^{10}\right)^4 \cdot 2^{5^2} \cdot 2^{13^0}=2^y$;
c) Aflați numărul z știind că: $\left(5^{2^3} \cdot 5^{3^2} \cdot 25^2\right)^5=5^z$.

87. Completați "*pătratele magice*" de mai jos, astfel încât pe linii, pe coloane și pe diagonale să se obțină produse egale:

2^8	2	2^6
2^4		

5^7	1	
5^2		
5^3		

88. Efectuați: a) $\left(81^3 \cdot 27^5\right)^3 : 9^{40}$; b) $\left(16^4 \cdot 4^{16}\right) : 8^{16}$;
c) $\left(125^7 \cdot 25^2\right)^3 : \left(5^6\right)^{12}$; d) $\left(2^5 \cdot 5^2 \cdot 7^3\right)^4 : \left(2^{19} \cdot 5^7 \cdot 7^{11}\right)$;
e) $\left[\left(3^2\right)^5+3^5+3^0\right] : \left[\left(3^5\right)^2+3^2 \cdot 3^3+3^3 : 3^3\right]$.

89. Efectuați: a) $2^{1996}-2^{1995}$; b) $3^{1996}+6 \cdot 3^{1995}$;
c) $2^{1995} \cdot 3^{1996}-3^{1995} \cdot 2^{1996}$.

90. Comparați numerele: a) $100^{75}+10$ și $1000000^{25}+10$; b) 2^{99} și $3^{57}-9^{28}$;
c) 3^{38} și $2^{59}-2^{58}-2^{57}$; d) 2^{82} și $3^{55}-9^{27}$.

91. Aflați valorile numărului natural x pentru care:
a) $2^x<3^5$; b) $3^x<2^7$; c) $5^x<10^3$; d) $10^2<4^x<10^3$.

92. Fie $a=2^5 \cdot 3^7 \cdot 5^{26}$ și $b=2^{30} \cdot 5^5 \cdot 7^7$. În câte zerouri se termină produsul $a \cdot b$?

93. Calculați $a:b$, unde $a=\left(5^{100}-125^{33}\right):4$ și $b=2^{7^2}:75^0$.

94. Știind că $5^n=a$, exprimați în funcție de a numerele: a) 5^{n+1}; b) 25^n; c) 5^{2n+1}.

95. Dacă a și b sunt numere naturale diferite de zero, calculați:
a) $\left(a^{10} \cdot a^{13}\right)^2 \cdot \left(a^2 \cdot a^5\right)^3$; d) $\left(a^5+a^6+a^7\right) : a^5$;
b) $(ab)^7 : a^7$; e) $\left(b^2+b^3+b^4\right) : b^2$;
c) $(ab)^{13} : b^{13}$; f) $\left[\left(b^{10}+b^{11}+b^{12}\right) : \left(1+b+b^2\right)\right]^{10} : b^{99}$.

96. Aflați numerele naturale x, y, z dacă:
a) $x^2=\left(10^2+2^3\right):3$; b) $y^2=5^3:5^{2^0}$; c) $z^2=\left(5^2\right) \cdot 2^{3^0}-7^0$.

97. Efectuați: a) $2^1 \cdot 2^2 \cdot 2^3 \cdot \ldots \cdot 2^8-2^{36}$;

Scanned with OKEN Scanner

b) $3^1 \cdot 3^2 \cdot 3^3 \cdot \ldots \cdot 3^9 : 3^{45}$; c) $4^1 \cdot 4^2 \cdot 4^3 \cdot \ldots \cdot 4^{10} + 4^{54} - 5 \cdot 4^{54}$.

98. Aflați ultima cifră a numerelor: a) 2^{1994}; b) 3^{1995}; c) 7^{1996}; d) 8^{1997}.

99. Scrieți numărul 2^{1996} ca sumă a două numere impare consecutive.

100. Scrieți numărul 3^{1996} ca sumă a trei numere consecutive.

101. Care este ultima cifră a numerelor:
a) $1995^{1995} + 1996^{1996}$; b) $1995^{1994} + 1994^{1995} + 1996^{1995} + 1995^{1996}$.

102. Dacă $a^5 + a^4 + a^3 + a^2 + a + 1 = 0$, calculați: $a^{101} + a^{100} + \ldots + a^2 + a + 1$.

103. Aflați suma cifrelor numărului $10^{n+1} + 2 \cdot 10^n + 4$, unde $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

104. Aflați ultima cifră a numărului:
$$2^{4n} + 7^{4p+1} + 3^{4k+2} + 9^{2m+1}, \text{ unde } n, p, k, m \in \mathbb{N}^*.$$

105. Determinați ultimele trei cifre ale numărului: $a = 2^n \cdot 5^n + 5^3$ unde n este număr natural.

106. Arătați că: $\left(2^{99} + 1\right)\left(2^{104} + 1\right) > \left(2^{100} + 1\right)\left(2^{103} + 1\right)$.

107. Scrieți în ordine crescătoare numerele: 4^{14}, 5^{12}, 7^{11}, 11^7.

108. Fie numărul $a = 2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^{1995}$. Scrieți numărul $a + 1$ ca o putere a lui 2.

109. Scrieți numerele pătrate perfecte cuprinse între 100 și 1000 inclusiv.

110. Arătați că nu există nici un număr de forma $\overline{aaa}$ care să fie pătrat perfect.

111. Aflați cifra x știind că numărul $\overline{21x6}$ este pătrat perfect.

112. Arătați că numărul: $101 + 2(1 + 2 + 3 + \ldots + 100)$ este pătrat perfect.

113. Scrieți fiecare dintre numerele 34, 65, 130, 346, 1105 ca sumă a două pătrate perfecte.

114. Scrieți fiecare dintre numerele 40 și 120 ca diferențe a două pătrate perfecte.

115. Scrie fiecare dintre numerele 17, 29, 41 ca sumă a trei pătrate perfecte.

116. Suma a cinci numere naturale nenule diferite este 22. Arătați că printre ele se găsește cel puțin un pătrat perfect.

117. Arătați că există $n \in \mathbb{N}$ astfel încât $n^2 + n + 41$ să fie pătrat perfect.

118. Arătați că numerele următoare nu sunt pătrate perfecte:
$$5n + 2;\ 10n + 7;\ 8n + 2;\ 8n + 3 \text{ unde } n \in \mathbb{N}.$$

119. Aflați care dintre numerele următoare sunt pătrate perfecte:
$$a = 4^{n+2} \cdot 9^{n+1} - 4^{n+1} \cdot 3^{2n+3}$$
$$b = 3^{2n+3} \cdot 4^{2n+3} - 2^{2n+1} \cdot 6^{2n+3}$$
$$c = 2^n + 3^{n+1} + 5^{n+2} + 7^{n+3}.$$

120. Pentru ce valori ale lui $m \in \mathbb{N}$ numerele $2^n \cdot 6^n \cdot 3^m$ este pătrat perfect, știind că n este număr natural impar.

121. Aflați suma cifrelor numărului $\overline{abcd}$ știind că numărul $\overline{ab} + \overline{bc} + \overline{cd} + \overline{da}$ este pătrat perfect.

122. a) Aflați toate numerele de forma $\overline{abc}$ cu cifrele diferite care verifică relația:
$$\overline{abc} + \overline{bca} + \overline{cab} = 2775.$$
b) Aflați toate numerele $\overline{abcd}$ cu cifrele diferite care verifică relația:
$$\overline{abcd} + \overline{bcda} + \overline{cdab} + \overline{dabc} = 37774.$$

123. Aflați cea mai mică și cea mai mare valoare a sumei $\overline{abc} + \overline{bca} + \overline{cab}$ unde $\overline{abc}$ este

Scanned with OKEN Scanner

un număr de trei cifre cu cifrele diferite.

124. Determinați cifrele a și b astfel încât

$$\overline{aab} + \overline{baa} + \overline{ab} + \overline{ba} = 90 + \overline{aaa} + \overline{bbb}.$$

125. a) Arătați că dacă numărul $\overline{abc}$ dă restul zero la împărțirea cu 37, atunci și numerele $\overline{bca}$ și $\overline{cab}$ au aceeași proprietate.

b) Arătați că dacă numărul $\overline{abcd}$ dă restul zero la împărțirea cu 101, atunci și numerele $\overline{bcda}$, $\overline{cdab}$, $\overline{dabc}$ au aceeași proprietate.

126. Aflați produsul a zece numere naturale diferite știind că suma lor este 45.

127. Suma a cincizeci de numere naturale diferite este 1276. Arătați că cel puțin unul dintre ele este mai mare decât 50.

128. Suma a cincizeci de numere naturale diferite nenule este 2548. Arătați că printre ele există cel puțin două numere impare.

129. Aflați valoarea lui $n \in \mathbb{N}$ pentru care numerele $n + 1$ și $4n - 3$ sunt simultan pătrate perfecte.

130. Un elev cumpără timbre cu 41 de lei bucata, cu 72 de lei bucata și cu 75 de lei bucata, în total 10 timbre și plătește 670 de lei. Câte timbre de fiecare fel a cumpărat ?

131. Cum se pot așeza 15 nasturi în 5 cutii astfel încât fiecare cutie să conțină cel puțin un nasture și să nu existe două cutii cu același număr de nasturi ? Aceeași problemă pentru 16 nasturi sau pentru 14 nasturi.

132. Care este cel mai mic număr de bile ce se pot pune în 10 cutii, știind că sunt îndeplinite simultan condițiile: a) nu există cutii cu același număr de bile; b) fiecare cutie conține cel puțin două bile; c) fiecare cutie conține un număr par de bile.

133. Într-o cutie sunt 10 bile galbene, 12 bile albastre și 15 bile verzi. Care este cel mai mic număr de bile care trebuie extrase din cutie, fără a vedea culoarea acestora, pentru a fi siguri că am obținut bile de cel puțin două culori ? Dar pentru a fi siguri că am obținut toate culorile ? Câte bile trebuie scoase (cel mult) pentru a fi siguri că rămân în cutie bile de toate culorile ?

134. Într-o urnă sunt 28 de bile albe, 27 de bile albastre și 18 bile galbene. Care este numărul minim de bile care trebuie extrase, fără a vedea culoarea acestora, pentru a fi siguri că am extras cel puțin 10 bile de aceeași culoare.

135. Într-o urnă sunt 15 bile albe, 22 bile roșii și 27 bile galbene. Care este cel mai mic număr de bile care trebuie extrase, fără a vedea culoarea lor, pentru a fi siguri că am extras: a) cel puțin o bilă albă; b) cel puțin o bilă de fiecare culoare; c) cel puțin 2 bile de aceeași culoare; d) cel puțin 2 bile de culori diferite.

*

* *

Scanned with OKEN Scanner

CAP. II. • MULȚIMI •

1. Fie mulțimile: $A = \{0; 1; 3; 5; 7\}$ și $B = \{1; 3; 5\}$. Stabiliți care dintre următoarele propoziții sunt adevărate și care sunt false: a) $1 \in A$; b) $2 \in B$; c) $3 \in A$ și $3 \in B$; d) $7 \notin B$; e) $0 \notin A$; f) $A = B$; g) $A \subset B$; h) $B \subset A$.

2. Scrieți mulțimea literelor din care este alcătuit cuvântul *MATEMATICĂ*.

3. Scrieți următoarele mulțimi, folosind proprietăți caracteristice ale elementelor lor:
$D = \{0, 2, 4, 6\}$; $E = \{2, 5, 8, 11, 14\}$; $F = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, ...\}$;
$G = \{0, 1, 2, 3, 4\}$; $H = \{3, 4, 5, 6, 7\}$.

4. Determinați valorile lui x, așa încât să fie adevărată propoziția:
$A \subset B$, unde $A = \{2; x; 8\}$ și $B = \{2; 3; 4; 5; 6; 7; 8\}$.

5. Determinați x și y, astfel încât mulțimile $A = \{4; x; 13\}$ și $B = \{y; 4; 7\}$, să fie egale.

6. Se dau mulțimile: $C = \{1, 2, 4, a\}$; $D = \{x \in \mathbf{N}, x = 8 : n, n \in \mathbf{N}^*\}$. Aflați a, astfel încât $C = D$.

7. Scrieți următoarele mulțimi, enumerând elementele lor:
$A = \{x \in \mathbf{N}, x < 4\}$; $F = \{z \in \mathbf{N}, 4 < z \leq 8\}$;
$B = \{x \in \mathbf{N}^*, x \leq 6\}$; $G = \{x \in \mathbf{N}, x < 8, x = 2k + 1, k \in \mathbf{N}\}$;
$C = \{x \in \mathbf{N}, 3 \leq x \leq 7\}$; $H = \{x \in \mathbf{N}, x = 2k, k \in \mathbf{N}, 3 < x \leq 10\}$;
$D = \{x \in \mathbf{N}, 2 < x < 8\}$; $M = \{x \in \mathbf{N}, x \text{ este cifră pară}\}$;
$E = \{y \in \mathbf{N}, 5 \leq y < 9\}$; $N = \{x \in \mathbf{N}, x \text{ este cifră impară}\}$.

8. Fie $A = \{x \in \mathbf{N}^*, x < 5\}$; $B = \{x \in \mathbf{N}, 1 < x \leq 5\}$ și $C = \{x \in \mathbf{N}, x + 1 \leq 5\}$. Scrieți mulțimile $A \cap B \cap C$ și $A \cup B \cup C$, folosind o proprietate caracteristică a elementelor lor.

9. Aflați elementele mulțimilor: $A = \{x \in \mathbf{N}, x < 25, x : 4 \in \mathbf{N}\}$;
$B = \{x \in \mathbf{N}, 13 : x \in \mathbf{N}\}$.

10. Fie mulțimile: $A = \{a; b; d\}$; $B = \{b; c\}$ și $C = \{c; d; e\}$. Calculați: a) $A \cup B$; b) $A \cup C$; c) $B \cup C$; d) $A \cup B \cup C$; e) $A \cap B$; f) $A \cap C$; g) $B \cap C$; h) $A \cap B \cap C$; i) $(A \cup B) \cap C$; j) $A \cap (B \cup C)$; k) $A - B$; l) $B - A$; m) $B - C$; n) $(A \cup B) - C$; q) $A - (B \cap C)$; p) $A \times B$; r) $B \times C$; s) $(A \times B) \cup (B \times C)$.

11. Fie $D = \{x \mid x \in \mathbf{N}; x \leq 4\}$; $E = \{x \mid x \in \mathbf{N}; 3 \leq x < 7\}$ și $F = \{x \mid x \in \mathbf{N}^*; x < 4\}$.
a) Determinați elementele mulțimilor D, E și F. b) Calculați: $D \cup E$; $D \cup F$; $E \cup F$; $D \cup E \cup F$; $D \cap E$; $D \cap F$; $E \cap F$; $D \cap E \cap F$; $D - E$; $D - F$; $F - E$; $(D \cup E) \cap F$; $(D \cap F) - (D \cap E)$; $E - E$; $(F - D) \cup (F \cap D)$; $D \cup \varnothing$; $E \cap \varnothing$; $\varnothing - F$; $D - \varnothing$.

12. Fie mulțimile $A = \{x \mid x \in \mathbf{N}; 5 \leq 2x < 20\}$, $B = \{y \mid y \in \mathbf{N}, y^2 = x, x \in A\}$. Calculați: $A \cup B$; $A \cap B$; $A - B$; $(A \cap B) - (A \cup B)$; $[(A - B) \cup (B - A) \cup (A \cap B)] \cap \varnothing$.

13. Se dau mulțimile: $A = \{x \in \mathbf{N}^*; 12 : x \in \mathbf{N}, x \leq 6\}$;
$B = \{x \in \mathbf{N}^*; 16 : x \in \mathbf{N}, x \leq 8\}$; $C = \{x \in \mathbf{N}^*; 18 : x \in \mathbf{N}, x < 9\}$.
Aflați: $A \cup B$, $A \cap C$, $B \cap C$, $A \cap B$, $A - C$, $C - A$, $B - C$, $C - A$, $A - B$, $C - B$.

14. Se dau mulțimile: $A = \{1, 3, 9, 27\}$; $B = \{y \in \mathbf{N}, y : 3 \in \mathbf{N}, y \in A, y < 15\}$; $C =$

Scanned with OKEN Scanner

$= \{z \in \mathbf{N}, z = y - 3, y \in B\}$. Aflați: $A \cap B \cap C$; $(A - B) \cup C$, $A - (B \cap C)$.

15. Fie mulțimile: $A = \{3, 5, x\}$; $B = \{3, y, 7\}$. Aflați x și y astfel încât: $A \cup B = A \cap B$.

16. Se dau mulțimile: $A = \{x \in \mathbf{N}, x = 8 : (n+2), n \in \mathbf{N}\}$; $B = \{y \in \mathbf{N}, y = x^2, x \in A\}$; $C = \{z \in \mathbf{N}, z = 2^n, n \in \mathbf{N}, n \leq 4\}$. Arătați că:

a) $(B - C) \cup A = A$; b) $(B \cap C) - \{16\} = A \cap B$.

17. Se dau mulțimile: $A = \{x \in \mathbf{N}^*, x < 7\}$; $B = \{y \in \mathbf{N}, y = 6 : x, x \in A\}$; $C = \{z \in \mathbf{N}, z = a + 2, 2 \leq a \leq 3, a \in \mathbf{N}\}$. Arătați că $C = A - B$.

18. Fie $M = \{x \in \mathbf{N}, x = 2p - 1, p \in \mathbf{N}^*, p \leq 6\}$; $P = \{y \in \mathbf{N}, y = 2p + 1, p \in \mathbf{N}, p \leq 6\}$. Ce relație există între cele două mulțimi ?

19. Fie mulțimile: $A = \{6, 7, 9, 12, 15, 20, 23, 26\}$; $B = \{x \in A \mid x - 3 \in A\}$; $C = \{x \in A \mid x + 3 \in A\}$. Aflați $B \cap C$, $B - C$, $C - B$.

20. Fie mulțimile: $A = \{x \in \mathbf{N} \mid 3(x + 4) = 2(2x + 2)\}$;

$B = \{x \in \mathbf{N} \mid x - 5 = 3\}$; $C = \{x \in \mathbf{N} \mid (x - 2)(x - 8) = 0\}$.

Aflați: a) $A \cup B \cup C$; b) $A \cap B \cap C$; c) $(A \cup B \cup C) - (A \cap B \cap C)$.

21. Fie mulțimile: $A = \{x \in \mathbf{N} \mid x = 2^{2^n}; n \in \mathbf{N}^*, n < 3\}$;

$B = \{y \in \mathbf{N} \mid y^2 = x, x \in A\}$; $C = \{z \in \mathbf{N} \mid z = y^2 - 1, y \in B\}$.

a) Determinați elementele mulțimilor; b) Calculați $A \cup B$, $A \cap B$, $B - A$, $B - C$.

22. Fie mulțimile: $A = \{x \in \mathbf{N} \mid 2x - 1 \in \{3, 5, 6, 7, 9, 10\}\}$;

$B = \{x \in \mathbf{N}, 2x + 1 \leq 9\}$; $C = \{x \in \mathbf{N}, 5x - 1 > 9\}$.

Aflați $A \cap B \cap C$.

23. Fie mulțimile $A = \{2, 3, x\}$ și $B = \{1, 3, y\}$. Determinați x și y știind că $A \cup B = A$.

24. Determinați numerele naturale m și n, astfel încât: $\{m, n, n + 6\} = \{17, 20, 11\}$.

25. Scrieți submulțimile mulțimilor: $\{1\}$; $\{1; 2\}$; $\{1; 2; 3\}$; $\{1; 2; 3; 4\}$. Câte submulțimi are fiecare dintre mulțimile date ? Puteți spune câte submulțimi are o mulțime cu 6 elemente fără a le scrie ? Dar o mulțime cu 7 elemente ? Dar o mulțime cu n elemente ?

26. Scrieți submulțimile mulțimii $A = \{0, 2, 3, 4\}$.

27. Fie $A = \{2, 3, 4, 5\}$. Scrieți toate submulțimile mulțimii A care conțin elementul 3.

28. Se dau mulțimile: $A = \{x \mid x = 2^n, n \in \mathbf{N}, n \leq 3\}$; $B = \{y \mid y = x^2, x \in A\}$; $C = \{z \mid y = z^3, y \in B, z \in \mathbf{N}\}$. Calculați: $A \cup B$, $A \cup C$, $A - C$, $C - A$.

29. Fie mulțimile: $A = \{5n + 2; 5n + 3; 5n + 7; 5n + 8 \mid n \in \mathbf{N}\}$ și $B = \{n^2 \mid n \in \mathbf{N}\}$. Calculați $A \cap B$.

30. Determinați mulțimea $A = \{n \in \mathbf{N} \mid 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n + 2 = k^2, k \in \mathbf{N}\}$.

31. Fie mulțimea $A = \{3, 5, 7\}$. Determinați mulțimea B, știind că are șase elemente, numere naturale și că suma elementelor lui A este egală cu suma elementelor lui B.

32. Aflați mulțimile A și B știind că sunt îndeplinite simultan condițiile:

a) $A \cup B = \{5, 6, 8, 9, 11, 15, 17\}$; b) $A \cap B = \{5, 17\}$; c) $A - B = \{8, 11\}$.

33. Determinați mulțimile A, B, C cu elemente numere naturale, nenule știind că A are 4 elemente, B are 3 elemente, C are două elemente și îndeplinesc condițiile: a) $A \cap B = \{1, 2\}$; b) $B \cap C = \{4\}$; c) suma elementelor lui C este cu 3 mai mare decât suma elementelor lui B și cu 1 mai mică decât suma elementelor lui A.

34. Aflați mulțimile A și B, știind că îndeplinesc simultan condițiile:

Scanned with OKEN Scanner

a) $A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$; b) $A \cap B = \{2, 4\}$; c) $A - B = \{1, 3, 5\}$.

35. Determinați mulțimile A și B știind că: $A \cup B = \{3, 4\}$ și $A - B = \{3\}$.

36. Aflați mulțimea X dacă $X \cap \{3, 4, 5\} = \{3, 5\}$ și $X \subset \{3, 4, 5, 6\}$.

37. Determinați mulțimile X și Y, știind că îndeplinesc simultan condițiile:
a) $X - Y = \{2, 3\}$; b) $Y - X = \{1\}$; c) $X \cup Y = \{1, 2, 3, 4\}$.

38. Câte elemente are mulțimea $M = \{(x, y) \mid x, y$ sunt cifre nenule și $\overline{xy} + \overline{yx} = 55\}$?

39. Aflați mulțimea X, știind că îndeplinește simultan condițiile:
a) $X \cap \{2, 3, 5\} = \{2, 5\}$; b) $X \cup \{2, 3, 5\} = \{2, 3, 5, 7\}$.

40. Determinați mulțimile X și Y, știind că satisfac simultan condițiile:
a) $X \cup Y = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$; b) $X \cap Y = \{3, 4, 5\}$; c) $Y - X = \{6\}$.

41. În ce condiții: $A - (A \cap B) \subset B - (A \cap B)$?

42. Să se determine mulțimile A, B și C care satisfac simultan condițiile:
a) $A \cup B \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5\}$; b) $A \cup B - C = \{1, 3\}$;
c) $B \cup C - A = \{3, 4\}$; d) $A \cup C - B = \{2\}$; e) $A \cap C = \{2, 5\}$.

43. Să se determine mulțimile X și Y, știind că îndeplinesc simultan condițiile:
1) $X \cup Y = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$; 2) $X \cap Y = \{2, 3, 4\}$;
3) $\{0, 1, 7, 9\} - X = \{7, 9\}$; 4) $Y \subset \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9\}$.

44. Mulțimile A și B au următoarele proprietăți: 1) $A \cup B = \{1, 2, 3, 4\}$;
2) Fiecare mulțime are câte două elemente; 3) Dacă $x \in A$, atunci $x + 1 \in B$.
Determinați elementele mulțimilor A și B.

45. Determinați mulțimile A și B știind că îndeplinesc simultan condițiile:
a) $A \cup B = \{11; 17; 19\}$; b) $A \cap B = \{11; 19\}$; c) $B - A = \{\varnothing\}$.

46. Determinați mulțimile X și Y, știind că îndeplinesc simultan condițiile:
a) $X \cup Y = \{a; b; c; d; e\}$; b) $X - Y = \{a; e\}$; c) $Y - X = \{b; d\}$.

47. Să se determine elementele mulțimii $E = \{x, y, z, u, v\}$, știind că:
$\{x, y, 1\} \subset E$; $\{y, z, 2\} \subset E$; $\{u, 3, 4\} \subset E$; $\{z, 5, u\} \subset E$ și $\{x, y, 4, 5\} \subset E$.

48. Determinați mulțimile A și B știind că îndeplinesc simultan condițiile:
a) $A \cup B = \{1; 2; 3; 4\}$; b) $A - B \supset \{1\}$; c) $A \cap B \neq \varnothing$;
d) $B - A \not\subset \{2, 4\}$; e) $A - B \subset \{1, 2\}$.

49. Reuniunea a două mulțimi are 6 elemente, iar intersecția lor are 4 elemente. Câte elemente are fiecare mulțime ?

50. Câte elemente au mulțimile A și B, știind că $A \cup B$ are 10 elemente, $A - B$ are 3 elemente și $B - A$ are două elemente ?

51. Care dintre mulțimile următoare are mai multe elemente ?
$A = \{n \mid n \in \mathbf{N}, n \leq 2^{1996}\}$ și $B = \{n \mid n \in \mathbf{N}, 2^{1996} \leq n \leq 2^{1997}\}$.

52. Știind că mulțimea A are n elemente, mulțimea B are m elemente și $A \cup B$ are $n + 2$ elemente, câte elemente are $A \cap B$?

53. Fie A o submulțime a mulțimii numerelor naturale, dacă A îndeplinește simultan condițiile : a) $2 \in A$; $3 \in A$; b) dacă $x \in A$, atunci $4 \cdot x \in A$; c) dacă $5 \cdot x - 2 \in A$, atunci $x \in A$. Arătați că: $32 \in A$; $192 \in A$; $26 \in A$.

*
* *

Scanned with OKEN Scanner

CAP. III. • DIVIZIBILITATE •

1. Să se determine cifra x, știind că numerele următoare sunt divizibile cu 2:

a) $\overline{23x}$; b) $\overline{305x}$; c) $\overline{23x6}$;

d) $\overline{x798}$; e) $\overline{57xx}$; f) $\overline{x89xx}$;

g) $\overline{xxx4}$; h) $\overline{xxx}$; i) $\overline{1x2x}$.

2. Scrieți toate numerele de trei cifre divizibile cu 2 care se pot forma cu cifrele 7, 8, 9.

3. Scrieți toate numerele de trei cifre divizibile cu 2 care se pot forma cu cifrele 0, 3, 4.

4. Să se arate că numerele: a) $17^{1993}+1$;

b) $2^{1993}+3^{1994}+5^{1995}$;

c) $\left(1992^{1993}+1993^{1994}\right)\cdot\left(1991^{1993}+1991^{1994}\right)$,

sunt divizibile cu 2.

5. Arătați că numărul $a=1+2+3+\ldots+100$ este divizibil cu 2.

6. Demonstrați că suma a două numere naturale consecutive nu este divizibilă cu 2.

7. Când suma a trei numere naturale consecutive este divizibilă cu 2 ?

8. Arătați că suma a patru numere naturale consecutive este divizibilă cu 2.

9. Demonstrați că suma unui număr par de numere naturale impare este un număr par.

10. Determinați $n\in\mathbf{N}$, așa încât $S=1+2+3+\ldots+n$ să fie un număr par.

11. Arătați că $(3n+1)(5n+4)$ este număr par, pentru orice $n\in\mathbf{N}$.

12. Stabiliți care dintre numerele următoare sunt pare și care sunt impare:

a) $2n+3$; b) $4n+6$; c) $(2n+1)(2n+3)$;

d) $n(n+3)$; e) n^2+n+1.

13. Scrieți toate numerele divizibile cu 3 de forma:

a) $\overline{25x3}$; b) $\overline{47x}$; c) $\overline{23xx}$;

d) $\overline{xxx}$; e) $\overline{xxxx}$; f) $\overline{1x2x3x}$.

14. Scrieți toate numerele de două cifre care sunt divizibile în același timp cu 3 și cu 10.

15. Scrieți toate numerele de forma $\overline{23xy}$ care sunt divizibile cu 2 și 3.

16. Determinați mulțimea: $A=\{x\in\mathbf{N}\mid x\le 25,\ x\vdots 3\}$.

17. Arătați că dacă a, b, c sunt cifre consecutive, atunci numerele $\overline{abc}$ sunt divizibile cu 3.

18. Arătați că numărul $a=4^{n+2}+4^{n+1}+4^n$ este divizibil cu 3, pentru orice $n\in\mathbf{N}$.

19. Arătați că numărul $5^{2n+1}+2\cdot5^{2n}-25^n$ este divizibil cu 3, oricare ar fi $n\in\mathbf{N}^*$.

20. Arătați că numărul $2^n\cdot5^n+2$ este divizibil cu 3, oricare ar fi $n\in\mathbf{N}$.

21. Să se demonstreze că numerele următoare sunt multipli de 3 :

$4^n\cdot25^n+5$; $8^n\cdot125^n+8$; $16^n\cdot5^{4n}+2$; $2^n\cdot5^n-1$.

22. Demonstrați că suma oricăror trei numere naturale consecutive este divizibilă cu 3.

23. Demonstrați că produsul oricăror trei numere naturale consecutive este divizibil cu 3.

24. Arătați că $(2n+1)(4n+3)(5n+2)$ este divizibil cu 3, pentru orice $n\in\mathbf{N}$.

25. Arătați că $(n-1)(n+4)(n+9)$ este multiplu de 3, pentru orice $n\in\mathbf{N}$.

26. Dacă x, y sunt numere naturale, arătați că $x+2y$ este divizibil cu 3 dacă și numai dacă

Scanned with OKEN Scanner

$2x + y$ este divizibil cu 3.

27. Arătați că dacă $(n + 4m) \vdots 17$, atunci $(6n + 7m) \vdots 17$, unde $m, n \in \mathbf{N}$.

28. Fie numerele de forma $\overline{185ab}$. a) Câte dintre acestea sunt divizibile cu 2 ? b) Dar cu 3 ?

29. Arătați că numărul $a = 5 + 5^2 + 5^3 + ... + 5^{100}$ este divizibil cu 3.

30. Determinați $n \in \mathbf{N}$, știind că $3 \mid a$, unde $a = 7 + 7^2 + 7^3 + 7^4 + ... + 7^n$.

31. Să se determine numerele divizibile cu 4 de forma:

a) $\overline{3x2}$; b) $\overline{154x}$; c) $\overline{x324}$; d) $\overline{x56x}$; e) $\overline{123xx}$; f) $\overline{xxx}$; g) $\overline{23x46}$.

32. Să se determine numerele divizibile cu 3 și 4 de forma:

a) $\overline{23xy}$; b) $\overline{5x6y}$; c) $\overline{x32x}$; d) $\overline{52xx}$; e) $\overline{x58y2}$.

33. Arătați că $3^{2n+2} - 9^n$ este divizibil cu 4, oricare ar fi $n \in \mathbf{N}$.

34. Arătați că $3^{n+3} + 3^{n+2} + 3^{n+1} + 3^n$ este divizibil cu 4, oricare ar fi $n \in \mathbf{N}$.

35. Arătați că produsul a patru numere naturale consecutive este divizibil cu 4.

36. Arătați că $n(n + 3)(3n + 2)(5n + 1)$ este multiplu de 4, oricare ar fi $n \in \mathbf{N}$.

37. Arătați că numărul $a = 3 + 3^2 + 3^3 + ... + 3^{1994}$ este divizibil cu 4.

38. Arătați că numărul $b = 1 + 5 + 5^2 + 5^3 + 5^4 + ... + 5^{99}$ este divizibil cu 4.

39. Arătați că $2n^2 + 2n$ este multiplu de 4, oricare ar fi $n \in \mathbf{N}$.

40. Să se determine valorile pe care le poate lua $n \in \mathbf{N}$, știind că numărul:

$a = 1 + 2 + 3 + ... + n$, este multiplu de 4.

41. Scrieți toate numerele divizibile cu 5 de forma:

a) $\overline{73x}$; b) $\overline{5x75}$; c) $\overline{x23x}$;

d) $\overline{xyy}$; e) $\overline{4x7}$; f) $\overline{4x0}$.

42. Arătați că numerele următoare sunt divizibile cu 5:

a) $3^{14} + 1$; b) $17^{26} + 6$;

c) $2^{33} + 3^{33} + 5^{33} + 7^{33} + 8^{33}$.

43. Fie $s = 1 + 2 + 3 + ... + 100$. Arătați că s este multiplu de 5.

44. Demonstrați că suma a cinci numere naturale consecutive este divizibilă cu 5.

45. Demonstrați că produsul a cinci numere naturale consecutive este divizibil cu 5.

46. Arătați că numerele următoare sunt divizibile cu 5:

a) $3^{n+2} + 3^n$; b) $4^{n+1} + 4^n$; c) $3 \cdot 2^{n+1} + 2^{n+2}$; d) $6^n - 1$.

47. Arătați că numărul $a = 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + 2^6 + 2^7 + 2^8$ este divizibil cu 5.

48. Să se determine numerele divizibile cu 4 și 5 de forma:

a) $\overline{4xy}$; b) $\overline{13xx}$; c) $\overline{232x}$; d) $\overline{x54y}$.

49. Să se determine mulțimea: $A = \{x \mid x \in \mathbf{N}, x \leq 28 \text{ și } x \vdots 5\}$.

50. Câte numere de trei cifre sunt divizibile cu 5 ?

51. Să se determine numerele divizibile cu 9 de forma:

a) $\overline{27x}$; b) $\overline{x392}$; c) $\overline{45xx}$;

d) $\overline{xxxx}$; e) $\overline{3x5x}$; f) $\overline{x72xx}$.

52. Arătați că numărul $4^{13} \cdot 25^{13} + 8$, este divizibil cu 9.

53. Arătați că numărul $2^n \cdot 5^n - 1$, este divizibil cu 9, oricare ar fi numărul natural n.

54. Arătați că numărul $a = 7^{53} + 5 \cdot 7^{51}$ este divizibil cu 9.

Scanned with OKEN Scanner

55. Arătați că numărul $a = 2^{102} + 2^{101} + 3 \cdot 2^{100}$ este multiplu de 9.

56. Arătați că numărul $a = 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{102}$ este multiplu de 7.

57. Arătați că numărul $10^n + 26$ este divizibil cu 9, oricare ar fi n număr natural.

58. Scrieți toate numerele divizibile cu 2 și cu 9 de forma:

a) $\overline{12x}$; b) $\overline{234xx}$; c) $\overline{35xy}$; d) $\overline{4x7y}$; e) $\overline{xx7y}$.

59. Scrieți toate numerele divizibile cu 4 și cu 9 de forma:

a) $\overline{45xx}$; b) $\overline{23xy}$; c) $\overline{x75y}$; d) $\overline{xx36y}$; e) $\overline{4x5y}$.

60. Scrieți toate numerele divizibile cu 5 și cu 9 de forma:

a) $\overline{63x}$; b) $\overline{75xy}$; c) $\overline{18xx}$; d) $\overline{x75y}$; e) $\overline{2x3yy}$.

61. Scrieți toate numerele divizibile cu 25 de forma:

a) $\overline{75x}$; b) $\overline{27xx}$; c) $\overline{8x5}$; d) $\overline{73x0}$; e) $\overline{1x25xx}$.

62. Arătați că numărul $3^{1995} + 3^{1993} \cdot 4^2$, este divizibil cu 25.

63. Scrieți numerele de forma $\overline{23x5}$ care sunt divizibile cu 5 și nu sunt divizibile cu 25.

64. Câte numere de trei cifre sunt divizibile cu 25 ?

65. Arătați că $4^{n+2} + 4^{n+1} + 5 \cdot 4^n$ este divizibil cu 25 , oricare ar fi numărul natural n.

66. Determinați cifra x, știind că numărul $\overline{45x}$ este divizibil cu 17.

67. Determinați cifra x, știind că numărul $\overline{32x7}$ este divizibil cu 19.

68. Arătați că numărul $n = \overline{abc} + \overline{bca} + \overline{cab}$, este divizibil cu 111.

69. Arătați că $M = \overline{ab303} + \overline{27ab}$, este divizibil cu 143 , oricare a fi cifrele a și b, a nenul.

70. Fie numerele $A = 6a + 7b + 8c$ și $B = 5a + 3b + c$, unde $a, b, c \in \mathbf{N}$. Să se arate că $A \vdots 17$ dacă și numai dacă $B \vdots 17$.

71. Dacă $a = 3^5 \cdot 25^3 \cdot 11^8$ și $b = 4^{10} \cdot 3^{11} \cdot 11^7$ arătați că $(a \cdot b) \vdots 10^6$.

72. Care pot fi divizorii comuni ai numerelor $n + 7$ și $n + 3$ $(n \in \mathbf{N})$?

73. Determinați numerele naturale d, știind că $d \mid (2n + 5)$ și $d \mid (n + 1)$, $(n \in \mathbf{N})$.

74. Dacă numerele $2n + 3$ și $3n + 2$ au un divizor comun, atunci el este 1 sau 5 $(n \in \mathbf{N})$.

75. Produsul dintre un număr prim și un număr natural impar este 270. Aflați numerele.

76. Determinați numerele prime a și b, știind că $a \cdot b = 2813$.

77. Determinați numerele prime a și b, știind că $15a + 8b = 54$.

78. Determinați numerele prime a, b, c, știind că $5a + 3b + 7c = 74$.

79. Determinați numerele prime a, b, c, știind că $2a + 3b + 4c = 30$.

80. Determinați numerele prime a, b, c, d, știind că $2a + 3b + 4c + 56d = 130$.

81. Aflați $n \in \mathbf{N}$, știind că $n + 1$, $n + 3$ și $n + 5$ sunt simultan numere prime.

82. Aflați $n \in \mathbf{N}$, știind că n, $n + 2$, $n + 6$, $n + 8$, $n + 14$ sunt simultan numere prime.

83. Determinați numerele naturale prime n, știind că numerele $2n + 1$, $3n + 2$, $4n + 1$, $5n + 2$, $6n + 1$, $7n + 2$, $9n + 2$, sunt simultan prime.

84. Arătați că numerele 149 și $\overline{4x9}$ sunt prime între ele, oricare ar fi cifra x.

Scanned with OKEN Scanner

85. Arătați că numerele 746 și $\overline{1xy7}$ sunt prime între ele, oricare ar fi cifrele x și y.

86. Arătați că numerele $2n+3$ și $3n+4$ sunt prime între ele, pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

87. Găsiți cel mai mic număr de forma $\overline{ab0ab}$, care să aibă cel mai mic număr de divizori.

88. Determinați numărul de elemente al mulțimii A, știind că se verifică simultan condițiile:
a) elementele lui A sunt numere pare consecutive ; b) între 51 și 71, A are exact 4 elemente ;
c) produsul elementelor lui A este divizibil cu 2^{22} și nu e divizibil cu 2^{23}.

89. Dacă $\overline{abc}$ este număr prim , câți divizori are numărul $\overline{abcabc}$?

90. Găsiți numărul $\overline{abcda}$, știind că $\overline{ab} \cdot \overline{cda} = 8153$.

91. Determinați numerele divizibile cu 45 de forma: a) $\overline{x23y}$; b) $\overline{xx57y}$; c) $\overline{78xyy}$.

92. Determinați numerele divizibile cu 36 de forma: a) $\overline{12xy4}$; b) $\overline{2x3y}$; c) $\overline{5xyy6}$.

93. Determinați numerele divizibile cu 18 de forma: a) $\overline{45x}$; b) $\overline{23xy}$; c) $\overline{x45yy}$.

94. Determinați numerele divizibile cu 180 de forma: a) $\overline{2xyz}$; b) $\overline{3x4yz}$; c) $\overline{xy8z}$.

95. Determinați cifra x așa încât numărul $\overline{123x45}$ să fie divizibil cu 55.

96. Demonstrați că numărul $N = 5^n \cdot 6^{2n+1} - 5^{n+1} \cdot 9^n \cdot 4^n + 5^n \cdot 3^{2n+1} \cdot 2^{2n+1}$ este divizibil cu 1260, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$.

97. Determinați cel mai mare divizor comun și cel mai mic multiplu comun al numerelor:
a) 6600 , 18000 ; b) 40131 , 292383 ; c) 27243216 , 349621272 , 465696 ;
d) 12409397 , 11022011 , 637637 ; e) 11552 , 8816 , 54872.

98. Să se determine cel mai mare număr natural nenul care divide numerele:
a) 360 , 2700 , 630 ; b) 1617 , 7623 , 2457 ; c) 14399 , 155771 , 64141.

99. Aflați cel mai mic număr natural nenul care se divide cu numerele:
a) 48 , 144 , 180 ; b) 231 , 693 , 2079 ; c) 1989 , 5967 , 2652.

100. Să se determine cel mai mic număr natural care împărțit pe rând la numerele 24 , 40 și 58 , dă de fiecare dată restul 5 și câtul nenul.

101. Determinați cel mai mic număr natural care împărțit pe rând la numerele 60 , 48 și 72 , dă de fiecare dată restul 13 și câtul nenul.

102. Determinați cel mai mic număr natural care îndeplinește simultan condițiile:
a) împărțit la 24 dă restul 14 ; b) împărțit la 36 dă restul 26 ; c) împărțit la 54 dă restul 44 .

103. Produsul a două numere este 54000, iar cel mai mare divizor comun al lor este 27. Aflați c.m.m.m.c. al celor două numere.

104. Produsul a două numere este 1920800 , iar c.m.m.m.c. al lor este 1960. Aflați c.m.m.d.c. al celor două numere.

*
* *

Scanned with OKEN Scanner

CAP. IV. • NUMERE RAȚIONALE POZITIVE •

1. Scrieți sub forma $\frac{a}{b}$: trei doimi; două treimi; patru cincimi; șase șesimi; cinci șeptimi; șapte optimi; zece noimi; nouă zecimi; opt șaisprezecimi.
2. Scrieți toate fracțiile cu numitorul 9 și numărătorul natural par mai mic sau egal cu 10 .
3. a) Câte fracții puteți scrie cu numărătorul număr natural mai mic sau egal cu 3 și numitorul număr natural nenul mai mic sau egal cu 4 ?
   b) Câte fracții puteți scrie cu numărătorul număr natural nenul mai mic decât 5 și numitorul număr natural nenul mai mic decât 4 ?
4. a) Scrieți fracțiile cu numărătorul 2 și numitorul de două cifre cu cifrele impare și diferite.
   b) Scrieți fracțiile cu numitorul 5 și numărătorul de două cifre cu cifrele identice .
5. Care sunt fracțiile cu numitorul 10 și numărătorul număr prim mai mic decât 100 ?
6. Scrieți fracțiile subunitare de forma $\frac{\overline{9*}}{\overline{*9}}$. Câte fracții supraunitare sunt de această formă ?
7. Scrieți fracțiile supraunitare de forma $\frac{*8}{9*}$. Câte fracții subunitare sunt de această formă ?
8. Aflați fracțiile subunitare de forma: $\frac{3n+2}{12}$ unde $n \in \mathbf{N}$.
9. Aflați fracțiile supraunitare de forma $\frac{9}{2n+1}$ unde $n \in \mathbf{N}$.
10. Aflați fracțiile subunitare de forma $\frac{3n+2}{n+12}$, $n \in \mathbf{N}$.
11. Care sunt fracțiile supraunitare de forma $\frac{n+9}{2n+1}$, $n \in \mathbf{N}$?
12. Aflați numărul fracțiilor care îndeplinesc simultan condițiile: a) au numărătorul un număr natural impar mai mic decât 8 ; b) au numitorul numărul natural par mai mic decât 19 ; c) sunt subunitare .
13. Care este numărul fracțiilor supraunitare care îndeplinesc condițiile: a) și b) din problema precedentă ?
14. Care din fracțiile $\frac{14}{21}, \frac{42}{54}, \frac{78}{117}, \frac{90}{120}, \frac{118}{177}, \frac{178}{267}, \frac{204}{297}, \frac{356}{519}$ sunt echivalente cu $\frac{2}{3}$?
15. Scrieți toate fracțiile cu numărul natural, mai mic sau egal cu 24, echivalente cu $\frac{2}{3}$?
16. Scrieți toate funcțiile echivalente cu $\frac{2}{5}$ care au numitorul număr natural mai mare decât 25 și mai mic sau egal cu 50.
17. Câte fracții echivalente cu $\frac{4}{5}$ au numărătorul un număr natural de două cifre, iar numitorul un nunăr natural de trei cifre ?
18. Completați fracțiile următoare, astfel încât două câte două să fie echivalente:
$$\frac{\square}{5}, \frac{\square}{8}, \frac{8}{\square}, \frac{11}{\square}, \frac{\square}{15}, \frac{7}{\square}.$$
19. Scrieți fracțiile echivalente cu fiecare dintre fracțiile următoare și care au numitorul o putere a lui zece cu exponentul cel mai mic posibil:

Scanned with OKEN Scanner

$$\frac{1}{4};\ \frac{1}{5};\ \frac{1}{20};\ \frac{1}{32};\ \frac{1}{40};\ \frac{1}{50};\ \frac{1}{80};\ \frac{1}{125};\ \frac{1}{160};\ \frac{1}{3125}.$$

20. Scrieți fracțiile echivalente cu fiecare dintre fracțiile următoare și care au numărătorul o putere a lui 10 cu exponentul cel mai mic posibil: $\frac{1}{3};\ \frac{2}{3};\ \frac{8}{3};\ \frac{16}{3};\ \frac{25}{3};\ \frac{400}{3};\ \frac{625}{3};\ \frac{1250}{3}$.

21. Simplificați fracțiile: a) $\frac{63}{84}$; b) $\frac{56}{84}$; c) $\frac{132}{165}$; d) $\frac{315}{378}$; e) $\frac{792}{924}$.

22. Simplificați fracțiile: a) $\frac{51}{85}$; b) $\frac{91}{104}$; c) $\frac{143}{187}$; d) $\frac{101}{1111}$; e) $\frac{1001}{1111111}$.

23. Simplificați:

a) $\frac{2+4+6+8+10}{2+4+6+8}$; b) $\frac{2+4+6+8+10}{2+4+6+8}$; c) $\frac{1+3+5+\ldots+49}{2+4+6+\ldots+50}$.

24. Simplificați fracțiile: a) $\frac{a}{\overline{a0}}$; b) $\frac{\overline{a0}}{\overline{aa0}}$; c) $\frac{\overline{a0a}}{\overline{a0a0}}$; d) $\frac{\overline{aa}}{\overline{aaaa}}$.

25. Găsiți fracțiile de forma $\frac{\overline{a12}}{\overline{a3b}}$ care se simplifică cu 2 și 3.

26. Scrieți toate fracțiile de forma $\frac{\overline{x7y}}{\overline{a12b}}$ care se simplifică cu 9 și 5.

27. Simplificați fracția: $\frac{2\cdot3+4\cdot6+6\cdot9+\ldots+20\cdot30}{3\cdot5+6\cdot10+9\cdot15+\ldots+30\cdot50}$.

28. Dacă $n\in\{3p+1,\ 3p+2\}$, atunci $\frac{(n+1)(2n+1)}{(4n-1)(4n+1)}$ se simplifică cu 3.

29. Arătați că fracția $\frac{7n+5}{4n+3}$ este ireductibilă ($n\in\mathbf{N}$). Fracția $\frac{4+3n}{2n+1}$ este ireductibilă ?

30. Comparați numerele: a) $\frac{19}{20}$ și $\frac{18}{19}$; b) $\frac{11}{13}$ și $\frac{13}{15}$; c) $\frac{13}{11}$ și $\frac{15}{13}$; d) $\frac{19}{18}$ și $\frac{20}{19}$.

31. Scrieți în ordine crescătoare numerele:

a) $\frac{11}{5}, 2, \frac{12}{5}, \frac{13}{5}, 3, \frac{14}{5}$; b) $\frac{2}{3}, \frac{2}{13}, \frac{2}{5}, \frac{2}{11}, \frac{2}{7}, \frac{2}{9}$; c) $\frac{21}{22}, \frac{22}{23}, \frac{23}{24}, \frac{25}{27}, \frac{27}{29}, \frac{29}{31}$.

32. Comparați numerele: $\frac{1}{12}+\frac{1}{13}+\frac{1}{14}+\ldots+\frac{1}{25}$ și $\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\frac{1}{13}+\ldots+\frac{1}{23}$.

33. a) Comparați numerele: $\frac{m}{n}$ și $\frac{m+1}{n+1}$ unde $m,n\in\mathbf{N}$; b) Care este cel mai mic și care este

Scanned with OKEN Scanner

cel mai mare dintre numerele: $\frac{1}{n}, \frac{2}{n+1}, \frac{3}{n+2}, \ldots, \frac{100}{n+99}$; $n \in \mathbf{N}^*$.

34. Pentru ce valori ale lui $n \in \mathbf{N}$, avem: $\frac{1}{7} < \frac{3}{4n+5} < 1$.

35. Determinați $n \in \mathbf{N}^*$, pentru care $\frac{1}{5} < \frac{2}{n^2} < \frac{6}{5}$.

36. Determinați $m, n, p \in \mathbf{N}^*$, știind că fracțiile $\frac{m}{18}, \frac{6}{n}, \frac{9}{6}, \frac{15}{p}$ sunt reprezentanți ai aceluiași număr rațional.

37. Care este cel mai mic număr rațional reprezentat de o fracție de forma $\frac{\overline{ab}}{\overline{cde}}$, știind că $\overline{ab}$ și $\overline{cde}$ sunt prime între ele?

38. Arătați că: $\frac{12}{24} + \frac{13}{39} + \frac{15}{90} = 1$ și $\frac{24}{12} + \frac{39}{13} + \frac{90}{15} = 11$.

39. Efectuați: $\left(\frac{2}{4} + \frac{6}{8}\,\frac{1}{12} + \ldots + \frac{98}{100}\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{5}{6} + \ldots + \frac{48}{49}\right)$.

40. Efectuați: a) $\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{99}\right)$;

b) $\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\left(1-\frac{1}{4^2}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{101^2}\right)$.

41. Arătați că: $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} = 2 - \frac{1}{32}$.

42. a) Arătați că: $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{19} - \frac{1}{20} = \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \ldots + \frac{1}{20}$;

b) $\frac{1}{2} < 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{19} - \frac{1}{20} < \frac{10}{11}$.

43. Verificați egalitățile: a) $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)}$;

b) $\frac{1}{n} - \frac{2}{n+1} + \frac{1}{n+2} = \frac{2}{n(n+1)(n+2)}$.

44. Calculați: a) $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{19\cdot 20}$;

b) $\frac{2}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{2}{2\cdot 3\cdot 4} + \ldots + \frac{2}{18\cdot 19\cdot 20}$.

45. Comparați numerele:

$a = \left(1 + \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}-\frac{1}{6}}\right)\left(1 - \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}+\frac{1}{6}}\right)$ și $b = \left(1 + \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}-\frac{1}{6}}\right)\left(1 - \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}+\frac{1}{6}}\right)$.

46. Arătați că: $\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2 + 1 + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{4}{5} + 1\frac{1}{5} + 1\frac{1}{15} =$

$= \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{4}{5}\right)^2$.

Scanned with OKEN Scanner

47. Efectuați: $\left(\frac{1}{2}\right)^3+\left(\frac{1}{3}\right)^3+\left(\frac{1}{6}\right)^3-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\right)\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{36}-\frac{1}{6}-\frac{1}{12}-\frac{1}{18}\right)$.

48. Arătați că: $\left(5+\frac{1}{4-\frac{2}{3}}\right):\left(1+\frac{5}{2+\frac{4}{3}}\right)=\frac{1^2+2^2\cdot 3^2+4^2}{1^2+2^2+3^2+4^2+5^2-30}$.

49. Efectuați: $\left[\left(1+\frac{4}{3}\right)^2-\left(1+\frac{3}{4}\right)^2\right]:\left[\left(1+\frac{3}{4}\right)^2+\left(1+\frac{4}{3}\right)^2\right]+\left(\frac{3}{5}\right)^2-\left(\frac{4}{5}\right)^2$.

50. Verificați egalitatea: $\frac{1}{\frac{1}{23}+\frac{1}{24}}+\frac{1}{\frac{1}{24}+\frac{1}{25}}=2^4$.

51. Efectuați: $\frac{123}{164}+\frac{123123}{164164}+\frac{123123123}{164164164}$.

52. Arătați că: a) $0,(1)+1,(2)+2,(3)+3,(4)+4,(5)=11,(6)$;
b) $0,(1)+0,(3)+0,0(5)+0,1(6)+0,08(3)=1:1,(3)$.

53. Se consideră numerele: $a=\left[1\frac{1}{10}+7:\left(3\frac{1}{12}-1\frac{5}{8}\right)\right]\cdot 1\frac{1}{59}$ și

$$b=\left[\left(3,0(6)-1\frac{1}{15}:1\frac{3}{5}+\frac{2}{5}\right)\cdot 2\frac{1}{7}-1\frac{1}{7}\right]\cdot 2,(3)-6,(6).$$

Să se calculeze: a) media aritmetică a numerelor a și b; b) media ponderată a numerelor a și b cu ponderile b pentru a și a pentru b.

54. Calculați media ponderată a numerelor: $a=1+\frac{1}{1-\frac{1}{1+\frac{1}{3}}}$ și $b=2+\frac{2}{1-\frac{2}{2+\frac{2}{3}}}$ cu ponderile $p_1=\left[1+\frac{1}{2}:\left(1+\frac{1}{2}\right)\right]:0,(3)$ și respectiv $p_2=\left[2-2:\left(1+\frac{1}{2}\right)\right]:0,(6)$.

55. Calculați media ponderată a numerelor $a=\frac{1}{2^3}\cdot 2^5-\frac{1}{3}$, $b=\frac{1}{3}:\frac{5}{3}+1\frac{1}{2}\cdot 0,(3)$, $c=1,1(3)+\frac{5}{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}-\frac{1}{3}$, cu ponderile $p_1=\frac{1}{11}$, $p_2=\frac{2}{7}$ și respectiv $p_3=\frac{1}{17}$ și comparați-o cu media lor aritmetică.

56. Calculați media aritmetică a numerelor

$$a=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{1996} \text{ și } b=\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\ldots+\frac{1995}{1996}.$$

57. Arătați că dacă se dau 3 numere naturale cu proprietatea că fiecare din ele este media aritmetică a celorlalte două, atunci cele 3 numere sunt egale.

58. Media aritmetică a numerelor $a_1, a_2, \ldots, a_{1996}$ este 2000, iar media aritmetică a numerelor $a_1, a_2, \ldots, a_{2000}$ este deasemenea 2000. Aflați media aritmetică a numărerelor: $a_{1997}, a_{1998}, a_{1999}, a_{2000}$.

59. Arătați că la orice număr de trei cifre la care cifra zecilor este media aritmetică a celorlalte două cifre, adunându-se o singură dată numărul format de cifra unităților se obține un număr divizibil cu 7.

60. Lucrând singur, un muncitor poate termina o lucrare în 2 zile, un al doilea muncitor ar

Scanned with OKEN Scanner

termina aceeași lucrare în 3 zile, iar altul în 6 zile. De câte zile au nevoie cei trei muncitori pentru a termina lucrarea, dacă lucrează împreună?

61. Raportul a două numere naturale este $\frac{5}{3}$. Dacă scădem 10 din primul și adăugăm 10 celui-lalt, raportul numerelor obținute devine $\frac{3}{5}$. Să se afle cele două numere.

62. În 24 de zile, 24 de muncitori repară $\frac{2}{3}$ dintr-un drum. Dacă lucrează în același ritm, în câte zile vor termina de reparat drumul? În câte zile vor termina de reparat $\frac{3}{4}$ din drum ?

63. Suma a două numere este 25, iar suma dintre produsul lor și câtul lor este $\frac{1105}{8}$. Să se afle numerele.

64. Patru elevi împart o sumă de bani astfel: primul ia $\frac{1}{2}$ din ceea ce ia al doilea, al doilea $\frac{2}{3}$ din cea ia al treilea și al treilea ia $\frac{3}{4}$ din ceea ce ia al patrulea. Știind că media aritmetică a sume-lor este 2500, să se afle sumele respective.

65. Adunând $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ și $\frac{1}{5}$ dintr-un număr necunoscut obținem 539. Aflați numărul necunos-cut.

66. $6\frac{1}{2}$ kg mere și 6 kg pere costă 12.400 lei, iar prețul unui kilogram de mere este egal cu $\frac{2}{3}$ din prețul unui kilogram de pere. Câți lei costă un kilogram de mere și câți lei costă un kilo-gram de pere.

67. Un număr este cu 35 mai mare decât alt număr. Să se afle numerele știind că $\frac{1}{3}$ din primul număr reprezintă $\frac{3}{4}$ din al doilea număr.

68. Aflați două numere naturale în fiecare din cazurile următoare: a) suma numerelor este 111, iar raportul 0,2(3); b) diferența numerelor este 789, iar raportul 0,12(3).

69. La un bazin sunt instalate două robinete: unul pentru apă rece și celălalt pentru apă caldă. Primul robinet curgând singur umple bazinul în $12\frac{1}{2}$ ore, iar robinetul cu apă rece poate umple bazinul în 10 ore. Se deschid ambele robinete timp de $2\frac{1}{2}$ ore, apoi se închide unul dintre ele. În cât timp va umple bazinul celălalt robinet.

70. Într-o clasă sunt mai puțin de 40 de elevi. Jumătate din numărul fetelor este egal cu o treime din numărul băieților. Unii elevi studiază limba engleză, iar alții limba franceză. O treime din numărul elevilor care studiază limba engleză este egal cu o pătrime din numărul elevi or care studiază limba franceză. Știind că 10 fete studiază franceza, aflați câți băieți studiază en-gleza.

*

* *

Scanned with OKEN Scanner

clasa a VI-a

CAP. I. • RAPOARTE • PROPORȚII • PROCENTE •

1. Raportul dintre prețul unui caiet și prețul unei cărți este $\frac{2}{5}$. Știind că dublul prețului unei cărți plus tiplul prețului unui caiet este 6400 lei și să se afle prețul fiecăruia.

2. Raportul lungimilor a două pătrate este $\frac{7}{9}$. Aflați raportul perimetrelor și ariilor lor.

3. Verificați care dintre rapoartele $\frac{1}{1,4}$; $\frac{45}{631}$; $\frac{10}{14}$; $\frac{3}{4}$, formează proporții cu raportul $\frac{5}{7}$.

4. Verificați dacă se pot forma proporții cu numerele:
a) $21, 7, 5, 15$; b) $4,(2), 2,9, 19$; c) $4, 8, 1, 2$.

5. Calculați valoarea raportului $\frac{4y-3x}{5y-4x}$, știind că $\frac{x}{y}=0,8$.

6. Se dă $\frac{a}{b}=0,(6)$. Să se determine: $A=\frac{3b}{9a+5b}$.

7. Să se determine $A=\frac{113a+4b}{226a+3b}$, dacă $\frac{a}{b}=\frac{211}{113}$.

8. Știind că $\frac{3y-2x}{5y-4x}=\frac{6}{7}$, calculați valoarea raportului $\frac{x}{y}$.

9. Știind că $\frac{2a}{3b}=\frac{1}{5}$, calculați $\frac{3a+b}{3a-b}$.

10. Fie $x, y \in \mathbf{Q}_+$. Arătați că $\frac{4x-y}{2x+3y}=\frac{1}{2}$ dacă și numai dacă $\frac{x}{y}=\frac{5}{6}$.

11. Determinați numerele naturale x, y, z știind că x este un număr prim și $\frac{x}{y}=\frac{z}{1,5}$.

12. Aflați x din:

a) $\frac{7}{5}=\frac{x}{15}$; b) $\frac{10}{1}=\frac{20}{x}$; c) $\frac{x}{7}=1$; d) $5x=\frac{0,2}{0,01}$;

e) $\frac{12}{3}=\frac{x}{1}$; f) $\frac{0}{x}=\frac{3}{4}$; g) $\frac{18}{12}=\frac{x}{11}$; h) $\frac{x}{10\left(1-\frac{1}{5}\right)}=\frac{1}{8}$;

i) $\frac{35,6-11(12-9)}{x}=\frac{5,2}{2}$; j) $\frac{3}{4\cdot 1,25}=\frac{x}{\frac{5}{2}(7+2\cdot 3,5)}$.

Scanned with OKEN Scanner

13. $\dfrac{\frac{1}{10}}{\frac{2}{10}\cdot x}=\dfrac{0,7\cdot y}{\frac{2}{5}}$. Calculați $100+xy$.

14. Determinați x din : $\dfrac{2x-1}{x-1}=\dfrac{2,(1)+3,1(6)+0,1(6)}{5,6:\frac{8}{10}+\frac{2}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{2}}}}\cdot 1\dfrac{124}{245}$.

15. Aflați x din: $6x=\dfrac{52}{\left(3,2-1\frac{2}{3}\right)^2}\cdot\left(\dfrac{23}{39}\right)^2$.

16. Aflați x din proporția

$$\frac{x+1}{x}=\frac{0,(3)+0,(27)+1,(23)}{4,5:0,09+2+\frac{2}{3}}\cdot 2607.$$

17. Să se afle x din proporția $\dfrac{0,1(2)}{3,3}=\dfrac{\overline{1a6}}{2x}$, unde $\overline{1a6}$ este un număr divizibil cu 9.

18. Aflați proporțiile care au termenii numere naturale nenule, știind că suma termenilor unui raport este 295, iar suma termenilor celuilalt raport este 335.

19. Să se calculeze valoarea raportului $\dfrac{ab+ac}{b^2+c^2}$ știind că b este două treimi din numărul a, iar c este șapte pătrimi din suma numerelor a și b.

20. Știind că $\dfrac{2a}{3}=\dfrac{3b}{5}=\dfrac{5c}{4}$ și $a+b+c=119$, determinați numerele a, b, c.

21. Dacă x, y, z și m sunt numere nenule, să se arate că $\dfrac{x}{x+my}=\dfrac{y}{y+mz}=\dfrac{z}{z+mx}$, dacă și numai dacă $x=y=z$.

22. Fie x, y, z, t numere raționale pozitive, astfel încât:

$$\frac{x}{y+z+t}=\frac{y}{z+t+x}=\frac{z}{t+x+y}=\frac{t}{x+y+z}.$$

Arătați că: $E=\dfrac{x+y}{z+t}+\dfrac{y+z}{t+x}+\dfrac{z+t}{x+y}+\dfrac{t+x}{y+z}\in\mathbf{N}$.

23. Să se determine numerele raționale nenegative a, b, c pentru care

$$\frac{a}{2}=\frac{b}{3}=\frac{c}{5} \text{ și } 2ab+3bc-ac=423.$$

24. Considerăm numerele raționale strict pozitive a, x, y, z care satisfac condițiile: $\dfrac{a-y}{x}=\dfrac{a-z}{y}=\dfrac{a-x}{z}$. Ordonați numerele x, y, z.

25. Fie $\dfrac{a}{b}=\dfrac{2}{3}$, $\dfrac{b}{3x}=\dfrac{c}{8}$, unde x este număr prim și $a<c$.

a) Să se determine valorile lui x;

b) Dacă $x=2$ și $\dfrac{abc}{ab+bc+ca}<\dfrac{12}{13}$ arătați că a, b, c nu sunt simultan naturale.

Scanned with OKEN Scanner

26. Folosind proporții derivate să se arate că dacă $\frac{x}{y}=\frac{z}{t}$, atunci:

$$(x+y+z+t)(x-y-z+t)=(x+y-z-t)(x-y+z-t).$$

27. Demonstrați că dacă a, b, c, d, m, n sunt numere naturale nenule care verifică egalitatea $\frac{ma+nb}{mc+nd}=\frac{a}{c}$, atunci: $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$.

28. Fie a, b, c lungimile laturilor unui triunghi ABC. Să se arate că dacă triunghiul este echilateral, atunci $\frac{3a+b}{3a-b}=\frac{3b+c}{3b-c}=\frac{3c+a}{3c-a}$ și reciproc.

29. Aflați $a, b, c, d \in \mathbb{N}$ care verifică relațiile $\frac{a}{b}=\frac{2}{3}, \frac{b}{c}=\frac{3}{4}, \frac{c}{d}=\frac{4}{5}$ și $abcd=120$.

30. Să se demonstreze că există numere pozitive a, b, c, d, astfel încât:

$$\frac{5a+b}{5c+d}=\frac{6a+b}{6c+d} \text{ și } \frac{7a+b}{7c+d}=8.$$

Calculați $\frac{9a+b}{9c+d}$.

31. Să se afle $x \in \mathbf{N}$, știind că:

$$\frac{x(x-1)(x+1)+3}{x(x-1)(x+1)+15}=\frac{x(x-1)(x+1)-2}{x(x-1)(x+1)-10}.$$

32. Să se determine numerele naturale x, y, z astfel încât $\frac{x}{2}=\frac{y}{3}=\frac{4}{z}$.

33. Să se afle numerele x, y, z având suma egală cu 15, dacă:

$$\frac{2x+3y}{14}=\frac{3}{2} \text{ și } \frac{5y+2z}{65}=\frac{3}{5}.$$

34. Să se afle $a, b, c \in \mathbf{N}^*$, dacă $\frac{a}{12}=\frac{b^3}{96}=\frac{c^2}{72}$ și $\frac{2}{3}a^3=b^2c^3$.

35. Să se afle numerele naturale a și b din egalitatea: $\frac{2a-3b+6}{2a+3b-6}=\frac{4a-8}{8}$.

36. Determinați numerele naturale x, y, z, t, știind că: $\frac{x}{2}=\frac{y}{3}=\frac{5}{z}=\frac{t}{7}$.

37. Fie x, y, z trei numere raționale pozitive nenule. Calculați $\frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{xyz}$, știind că $\frac{y+z-x}{x}=\frac{z+x-y}{y}=\frac{x+y-z}{z}$.

38. Se consideră n numere naturale nenule și diferite între ele notate odată cu $a_1, a_2, \ldots, a_n$ și apoi, în altă ordine, cu $b_1, b_2, \ldots, b_n$. Arătați că nu putem avea:

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\ldots=\frac{a_n}{b_n}.$$

39. Determinați cele mai mici numere naturale nenule x, y, z, t și n, știind că:

$$8x=10y=15z=24t=(x+y+z+t)n.$$

40. Demonstrați că dacă $\frac{a_1+a_2}{a_1+na_2}=\frac{a_2+a_3}{a_2+na_3}=\ldots=\frac{a_n+a_1}{a_n+na_1}$, $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbf{R}$,

Scanned with OKEN Scanner

$n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, atunci $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

41. Determinați numerele x, y, z știind că $x + y + z = 45$, $\frac{x}{2} = \frac{y}{3}$ și $\frac{y}{6} = \frac{z}{8}$.

42. Fie proporțiile $\frac{x}{2} = \frac{y}{3}$ și $\frac{y}{4} = \frac{z}{5}$ cu x, y, z numere raționale pozitive.

1) Determinați k și p, astfel încât să avem: $\frac{x}{8} = \frac{y}{k} = \frac{z}{p}$;

2) Pentru $k = 12$ și $p = 15$ determinați x, y, z știind că:

a) $x + y + z = 70$; b) $x^2 + y^2 + z^2 = 433$.

43. Să se împartă numărul 72 în părți direct proporționale cu numerele 3, 5, 10.

44. Să se determine x, y, z știind că între tripletele $(2, 3, 8)$ și (x, y, z) se stabilește o proporționalitate inversă și $1200(xy + xz + yz) = 13xyz$.

45. Să se arate că dacă $a, b, c, d \in \mathbb{N}^*$ și $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, atunci cu numerele (a, d), (b, c), $[a, d]$ și $[b, c]$ se poate forma o proporție.

46. Se dau numerele x, y, z, t, u dintre care primele trei sunt proporționale cu numerele 2, 3, 4, iar ultimele trei sunt invers proporționale cu numerele 2, 3, 4. a) Formați un șir de numere naturale, cele mai mici posibile, proporționale cu cele din șirul x, y, z, t, u; b) Aflați x, y, z, t, u știind că suma lor este 123.

47. Se dau numerele x, y, z direct proporționale cu numerele 2, 3, 4. Să se afle:

a) y, z dacă $x = 0,(3) + 3,(6) - 2\frac{2}{3}$;

b) x, y, z dacă $x + y + z = 117$; c) x, y, z dacă $x \cdot y \cdot z = 192$.

48. Numerele a, b, c sunt direct proporționale respectiv cu primele numere naturale prime. Determinați a, b, c știind că: $a^3b^2c = 23040$.

49. Dacă numerele naturale, distincte și nenule x, y, z sunt invers proporționale cu numerele naturale nenule a, b, c și dacă $ab^2 + bc^2 + ca^2 = 3abc$, să se arate că $\frac{y}{x}, \frac{z}{y}, \frac{x}{z}$ nu sunt simultan naturale.

50. Aflați trei numere naturale x, y, z știind că sunt în proporționalitate directă cu numerele 2, 3, 4 și că $(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2 = 294$.

51. Determinați numerele naturale x, y, z dacă între triplete $(x + y, y + z, x + z)$ și $(20, 15, 12)$ există o proporționalitate inversă și $x^2y^3z = 559872$.

52. Calculați suma a 20 de numere naturale consecutive dacă primul și ultimul sunt invers proporționale cu $0,60(5)$ și respectiv 0,5.

53. Să se determine numerele naturale x, y, z știind că sunt direct proporționale cu numerele $0,25$; $0,(3)$; $0,5$ iar $xy + xz + yz = 54$.

54. Dacă numerele strict pozitive a, b, c sunt invers proporționale cu numerele pozitive x, y, z și $\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2} = 1$, să se arate că: $\frac{x^2}{z^2} + \frac{y^2}{x^2} + \frac{z^2}{y^2} = 1$.

55. Să se arate că numerele $\overline{ab}$, $\overline{bc}$, $\overline{ca}$ scrise în baza zece, sunt direct proporționale cu c, a, b dacă și numai dacă $a = b = c$.

56. Să se arate că dacă $a < b < c$, numerele $\overline{ab}$, $\overline{bc}$, $\overline{ca}$ scrise în baza zece, nu pot fi invers proporționale cu c, a, b.

57. Numerele 5, 6, 7 sunt invers proporționale cu numerele x, y, z. Știind că x, y, z verifică

relația $3xyz = 35(xy + yz + xz)$, să se afle numerele x, y, z.

58. Determinați $a, b, c \in \mathbf{N}$, știind că sunt invers proporționale cu numerele 6, 10, 15 și că împărțind pe cel mai mare la cel mai mic se obține câtul 2 și restul 1.

59. Calculați suma $S = \overline{a,(b)} + \overline{b,(c)} + \overline{c,(a)}$, știind că a, b, c sunt cifre consecutive în această ordine și că primii doi termeni ai sumei sunt direct proporționali cu 51, respectiv 61.

60. Un număr n este împărțit în părțile a, b, c direct proporționale cu 8, 6 și 12 și apoi în părțile a', b', c' invers proporționale cu 8, 6 și 12. Dacă $a + b' = 880$, să se afle a, b, c, a', b', c' și n.

61. Să se determine numerele x, y, z știind că sunt invers proporționale cu $0,1(6)$; $0,125$; $0,08(3)$ și că $\dfrac{2xy + 5yz - 6zx}{xyz} = \dfrac{6}{5}$.

62. Numerele $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sunt invers proporționale cu numerele: $6, 12, 20, \ldots, \ldots, (n+1)(n+2)$. Dacă suma lor este 5760 și $a_{n-1} - a_n = 40$, să se afle a_1 și a_n.

63. Numerele x și y sunt invers proporționale cu 0,5 și 0, (3). Să se afle valoarea expresiei:

$$E = \frac{\dfrac{2x+3y}{11x-7y} - \dfrac{4y-3x}{8x-5y}}{\dfrac{9y-13x}{7y-10x} + \dfrac{18x-11y}{17y-21x}}.$$

64. Să se determine numerele a, b, c invers proporționale cu numerele 5, 6 și 10 dacă:

$$\frac{a^2 + b^2 + c^2}{abc} = \frac{14}{15}.$$

65. Fie $A \in \mathbf{Q}_+$ și a, b, c trei numere prime, $a < b < c$. Dacă împărțim numărul A în trei părți direct proporționale cu a, b, c obținem respectiv x, y, z, iar dacă împărțim pe A în trei părți invers proporționale cu a, b, c obținem u, v, t. Aflați numerele u, v, t dacă $xyz = 5250$.

66. Media aritmetică a cinci numere naturale este 336. Să se afle cele cinci numere, știind că primele trei numere sunt direct proporționale cu numerele 2, 7 respectiv 12, iar ultimele trei numere sunt invers proporționale cu numerele 3, 4 respectiv10.

67. Arătați că dacă între perechile de numere (x, y) și (x', y') există o proporționalitate inversă, atunci: $\dfrac{x'y'}{xy} = \left(\dfrac{x'+y'}{x+y}\right)^2$.

68. Aflați proporțiile care au termenii numere naturale, știind că suma termenilor unui raport este 295, iar suma termenilor celuilalt raport este 335.

69. Determinați numerele naturale a, b, c știind că sunt direct proporționale cu numerele 1; 0,4; 0,(4) și că $(a + b, c) = 1$.

70. Determinați cel mai mare număr natural de forma $\overline{abc}$, dacă $\overline{cab}$, $\overline{abc}$, $\overline{bca}$ sunt direct proporționale cu numerele 26, 38, 47.

71. Ariile a patru pătrate sunt direct proporționale cu 4, 25, 64, 100, iar suma dintre cel mai mic perimetru și cel mai mare perimetru este 48 cm. Aflați lungimile laturilor celor patru pătrate.

72. Din 3 m de stofă se obține un costum. Câte costume se vor obține din 150 m de stofă?

73. De pe un teren de 100 m^2 se obțin 100 kg de roșii și 75 kg de ardei gras. Ce suprafață trebuie să aibă un teren de pe care să se obțină 4 t de roșii și 3 t de ardei gras?

Scanned with OKEN Scanner

74. 6 muncitori au început o lucrare pe care și-au propus să o termine în 20 de zile lucrând câte 8 ore pe zi ; după 4 zile , 2 muncitori sunt detașați la o altă lucrare. În câte zile se va termina lucrarea inițială , dacă muncitorii rămași vor lucra câte 6 ore pe zi ?

75. Un bazin poate fi umplut de robinetul A în 4 ore , iar de robinetul B în 6 ore. În cât timp este umplut bazinul , dacă sunt lăsate deschise simultan ambele robinete ?

76. O lucrare are ca termen de execuție 21 de zile. 12 muncitori lucrează în 14 zile , $\frac{4}{7}$ din lucrare. Cu câți muncitori trebuie mărită echipa inițială pentru a respecta termenul ?

77. Pentru a transporta pământul excavat de pe un șantier la o distanță de 15 km , lucrează 23 de camioane de 4,5 tone fiecare. Câte camioane de 1,2 (7) ori mai mare ar fi necesare pentru a transporta aceeași cantitate cu 5 km mai aproape ?

78. Șase muncitori pot termina o lucrare în 12 zile. După 4 zile de lucru , echipa se mărește cu 2 muncitori. În cât timp se va executa restul lucrării ?

79. Opt tractoare ară $\frac{1}{2}$ dintr-un lot în 14 zile. Celor 8 tractoare li se alătură alte 6 tractoare și astfel se termină de arat tot lotul. Cu cât este mai mic intervalul de timp în care a fost terminată lucrarea față de situația în care ar fi lucrat numai cele 8 tractoare ?

80. O echipă formată din 10 muncitori poate termina o lucrare în 20 zile. După ce echipa lucrează 10 zile , 6 muncitori sunt trimiși în altă parte să lucreze. În cât timp vor termina lucrarea muncitorii care au rămas ?

81. Un camion parcurge distanța de 188 km în 4 ore. O parte din drum merge cu viteza de 42 km/ h , iar a doua parte din drum cu viteza de 50 km/ h. Ce distanță a parcurs cu prima viteză și ce distanță a parcurs cu a doua viteză ?

82. Masele a trei aliaje de aur sunt proporționale cu 1 , 3 și 2 , iar masa totală este 12 g. Masele aurului din cele trei bucăți sunt invers proporționale cu 8 , 3 , $3\frac{3}{7}$. Dacă amestecăm aliajele cu 3 g de aur , obținem un amestec cu titlul 0,800. Aflați titlurile celor 3 aliaje inițiale.

83. Avem două aliaje dintre care unul conține 400 g aur și 100 g aramă , iar celălalt 270 g aur și 30 g aramă. Cât trebuie luat din fiecare aliaj pentru a obține 400 g de aliaj cu titlul de 0,825 ?

84. În 200 g soluție de sare cu concentrația 25 ‰ se adaugă 100 g apă. Să se afle concentrația amestecului.

85. Se amestecă 2 kg de soluție de sare cu concentrația 4 % , cu 4 kg de soluție de 3,5 % și cu 4 kg soluție de 5,5 %. Care este concentrația amestecului ?

86. Din îngrășăminte de 60 lei/ kg și de 35 lei/kg s-au făcut 140 kg amestec de 42 lei/ kg. Câte kilograme s-au folosit din fiecare fel ?

87. Într-o tabără de odihnă se află 240 de elevi, din care 60 % sunt fete. Câți băieți trebuie să vină în tabără pentru ca numărul fetelor să reprezinte 40 % din numărul băieților ?

88. Suma a patru numere este 345. Aflați numerele , știind că al doilea este 80 % din primul , al treilea este 75 % din al doilea , iar al patrulea este 60 % din al treilea.

89. La un concurs au participat 370 de elevi din clasele a VI-a , a VII-a și a VIII-a. Știind că s-au remarcat 30 % din elevii clasei a VI-a, ceea ce reprezintă 20 % din elevii clasei a VII-a și tot atât cât 25 % din elevii clasei a VIII-a , stabiliți numărul elevilor prezenți la concurs din fiecare clasă și numărul elevilor remarcați din clasa a VI-a.

90. Suma a trei numere este 87. Dacă se mărește primul cu 150 % din el , al doilea se micșorează cu 25 % din el , iar al treilea se micșorează cu 5 , numerele obținute sunt egale. Aflați cele 3 numere.

91. Trei muncitori au realizat 1126 de piese.Dacă primul a realizat 120 % din numărul de piese realizat de al doilea , iar 40 % din cât a realizat al doilea reprezintă cu 10 % mai mult decât

Scanned with OKEN Scanner

30 % din cât a realizat al treilea, să se afle câte piese a realizat fiecare muncitor.

92. Trei secții ale unei întreprinderi trebuiau să realizeze după plan cantități de piese proporționale cu numerele 3, 4, 5. Depășindu-și planul cu 10 %, 15 % respectiv cu 20 %, au realizat cu 240 piese mai puțin decât dacă depășeau planul cu 20 %, 25 % respectiv 30 %. Câte piese trebuia să realizeze după plan fiecare secție ?

93. Într-un șir de numere, fiecare termen este cu 8 mai mare decât precedentul, iar media aritmetică a termenilor șirului reprezintă 20 % din suma termenilor. Dacă se mai știe că media aritmetică a termenilor șirului este egală cu termenul mijlociu, să se afle numerele din șir. *Soluția este unică* ?

94. După două creșteri consecutive, prețul unui obiect a ajuns de la 3500 lei la 3969 lei. Știind că a doua creștere a fost de 5 %, să se afle cât la sută reprezintă prima.

95. 490 ha au fost împărțite în trei parcele. Dacă din prima se scad 20 %, din a doua 33, (3) % și din a treia 25 %, toate terenurile rămase devin egale (ca suprafață). Care este suprafața celor trei parcele ?

96. Numărul a reprezintă 25 % din numărul b. Cât la sută reprezintă b din $a + b$?

97. Un automobil pleacă din localitatea A spre localitatea B cu o întârziere de o oră și 8 minute. Mergând 0,9 din distanță cu o viteză mai mare cu 20 % decât cea stabilită, iar restul cu o viteză mai mare de 25 % decât cea planificată, reușește să ajungă în B fără nici o întârziere. Aflați timpul planificat pentru parcurgerea distanței AB.

98. Împărțiți numărul 4800 în cinci părți, astfel încât să fie îndeplinite următoarele condiții: prima parte să reprezinte 12,5 % din numărul dat, partea a doua să reprezinte 17,5 % din rest, parea a patra să reprezinte 61,1 (1) % din partea a treia și raportul dintre partea a treia și partea a cincea să fie $\frac{45}{43}$.

99. Într-un oraș sunt astăzi 48400 de locuitori. Populația acestui oraș a crescut în fiecare din ultimii doi ani cu 10 %. Să se determine câți locuitori au fost în oraș acum doi ani.

100. În cărbunele de pământ intră în medie 80 % carbon, iar în turbă 64 % carbon. Ce cantitate de turbă trebuie să luăm pentru a avea o cantitate de carbon egală cu cantitatea de carbon conținută în 2 tone de cărbuni de pământ ?

*
* *

Scanned with OKEN Scanner

CAP. II. • NUMERE ÎNTREGI •

1. Câte numere întregi sunt mai mari sau egale cu -5 și mai mici sau egale cu 4 ?

2. Scrieți numerele întregi mai mari decât -3 și mai mici ca 8. Efectuați suma lor.

3. Scrieți numerele întregi mai mari sau egale cu -3 și mai mici sau egale cu 8. Efectuați produsul lor.

4. Comparați suma numerelor întregi între -5 și 5 cu produsul numerelor întregi cuprinse între -3 și 2.

5. Scrieți în ordine crescătoare numerele: $2, -3, 3, -1, 4, -5, 0, -4, -2, 1$.

6. Scrieți în ordine descrescătoare numerele: $1, -2, -4, 4, 0, -3, 2, 3, -5, -1$.

7. a) Ordonați crescător valorile absolute ale numerelor: $-4, -1, 2, -3, 5, -6, 0, -3, 4$;
b) Ordonați crescător valorile absolute ale numerelor: $-1, 5, -2, 6, -3, 7, -4, 8, -5$.

8. Aflați suma a cinci numere întregi consecutive, știind că unul dintre ele este -3.

9. Aflați $x \in \mathbf{Z}$ știind că:

a) $|x| = 2$; b) $|x| = 0$; c) $|-x| = 4$;
d) $|x| = -1$; e) $|-x| = -3$; f) $|-x| = |x|$.

10. Stabiliți valoarea de adevăr a propozițiilor:

a) $|3| = -3$; b) $|-2| = 2$; c) $|-6| = |+6|$; d) $|0| > 0$;
e) $|-5| < 0$; f) $|-8| > |-12|$; g) $|-10| \leq |10|$; h) $-|-3| \neq 3$.

11. Se dă mulțimea $A = \{-9, -7, -5, -3, 0, 1, 2, 7, 8, 11\}$. Să se determine mulțimea $B = \{x \in A \mid |x| \geq 5\}$.

12. Arătați că: $|-8| - |-7| + |-6| - |-5| + |-4| - |-3| + |-2| - |-1| = |-8+7-6+5-4+3-2+1|$.

13. Aflați numerele întregi x cu proprietatea: $2 \leq |x| < 5$.

14. Care numere întregi verifică simultan relațiile: $-10 < x < 10$; $|x| \geq 5$?

15. Câte numere întregi verifică simultan relațiile: $99 - x \leq 109$; $109 - x \geq 99$?

16. Arătați că: a) $12 + 3 - 4 + 5 + 67 + 8 + 9 = 12 - 3 - 4 + 5 - 6 + 7 + 89$;
b) $1 + 2 - 3 + 4 - 5 - 6 + 7 - 8 + 9 = 1 + 23 - 45 - 67 + 89$.

17. Efectuați: a) $(-11) - (-2) + (-4) - (+5) - (-3) + (+15)$;
b) $(-9 + 4 - 8 + 5) - (-9 + 5 - 7 + 1)$;
c) $10 - \{-8 + [(-3) + (+5) - (-7)] - (-9)\}$;
d) $-4 - (-2) - \{(-5) - [(-7) + (-3) - (-8)]\}$.

18. Efectuați în două moduri:

a) $(-5 + 3 - 2)(-2)$; b) $(-2 + 5 - 3)(-3)$;
c) $(-4 - 2 + 5 - 3)(-4)$; d) $(-3 - 2 - 4 + 5)(-5)$.

19. Efectuați: a) $(-5)(-4) + (-3) + (-2) + (-1)$;
b) $-(-1) + (-2) + (-3) - (-4) + (-5)$;
c) $(-2) - (-4) + (+6) - (+8) + (-10)$;
d) $(-1)(-2) + (-2)(-3) + (-3)(-4) - (-4)(-5)$;

Scanned with OKEN Scanner

e) $(-3)(-4)+[(-5)-(-6)]\cdot(-7)$;
f) $(-3)+(-4)[(-5)-(-6)]-(-7)$;
g) $[(-3)+(-4)+(-5)]:(-6)-(+7)$.

20. Arătați că:
$-1+2-3+4-\ldots-19+20=-1+3-5+7-\ldots-17+19=$
$=-2+4-6+8-\ldots-18+20$.

21. Comparați numerele:
$1-3+5-7+9-11+\ldots+37-39$ și
$-2+4-6+8-\ldots+36-38$.

22. Fie $a, b, c, d \in \mathbf{Z}$. Dacă $a=2$ și $b-c+d=-2$, să se calculeze:
$a-b+c-d$; $ab-ac+ad$; $c-b-d$.

23. Se dau numerele: $-3, -2, -1, 0, -4, 5$. Aflați suma și produsul opuselor acestora.

24. Alegeți semnele potrivite din expresia $\pm1\ \pm2\ \pm3\ \pm4\ \pm5\ \pm6\ \pm7\ \pm8\ \pm9\ \pm10$, astfel încât să obținem rezultatul: a) 5; b) -1; c) 1; d) -5.

25. Comparați numerele:
$(-1)+(-3)+(-5)+\ldots+(-99)$ și
$(-2)+(-4)+(-6)+\ldots+(-98)$.

26. Arătați că: $(-1)+(-3)+(-5)+\ldots+(-1999)=-1000^2$.

27 Efectuați:
a) $(400-40+4):(-4)-(-400):(+4)-(-40):(-4)-(-4):(+4)$;
b) $(-2+22-222)\cdot(-2)+(-2)\cdot(+2)+(-22)\cdot(-2)+(+222)\cdot(-2)$.

28. Calculați valoarea expresiei
$3(a+b+c)-2(a-b+c)+5(a-b-c)$, pentru:
$a=-1$; $b=-2$; $c=-3$.

29. Calculați suma: $-1-2+3+4-5-6+7+8-\ldots-97-98+99+100$.

30. Calculați: $a-b-c-d$; $-a-b-c+d$; $-a+b-c-d$; $-a-b+c-d$, pentru $a=1$; $b=-2$; $c=-3$; $d=-4$.

31. Efectuați:
a) $(-1)(-2)(-3)+(-2)(-3)(-4)-(-3)(-4)(-5)+(-1-2-3-4-5)$;
b) $1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5+(-1)(-2)(-3)(-4)(-5)+(-1)(-2)(-3)\cdot(-4)\cdot5+$
$+(-1)\cdot2\cdot3\cdot4\cdot(-5)+1\cdot(-2)(-3)(-4)\cdot5+1\cdot2\cdot(-3)\cdot4\cdot$.

32. Efectuați: a) $1-2+3-4+\ldots+99-100+50$;
b) $1-3+5-7+\ldots+97-99+51$;
c) $2-4+6-8+\ldots+98-100+52$.

33. Aflați numerele întregi care verifică una dintre relațiile: a) $-x=|x|$; b) $x=|-x|$. Există numere întregi care verifică ambele relații?

34. a) Aflați numerele întregi n pentru care $\frac{10}{n+1}$ este număr întreg;

b) Aflați numerele întregi de modul mai mic decât 20 pentru care $\frac{n+1}{10}$ este întreg.

35. Efectuați: a) $(-1)^1+(-1)^2+(-1)^3+\ldots+(-1)^{50}$;

b) $(-1)^1-(-1)^2+(-1)^3-\ldots+(-1)^{49}-(-1)^{50}$;

Scanned with OKEN Scanner

c) $(-1)^1 \cdot (-1)^2 \cdot (-1)^3 \cdot \ldots \cdot (-1)^{55}$.

36. Efectuați: a) $(-2)^1 \cdot (-2)^2 \cdot (-2)^3 : (-2)^4$;

b) $3^3 \cdot (-9)^3 \cdot (-27)^4$;

c) $(-2)^4 : (-2)^3 \cdot (-2)^2 : (-2)^1$;

d) $(-16)^2 \cdot (-8)^3 \cdot (-4)^2 \cdot (-2)^1$.

37. Comparați numerele: a) $(-2)^{20}$ și $(-4)^{10}$; b) $(-3)^{22}$ și 2^{33};

c) $(-3)^{22}$ și $(-2)^{33}$; d) $(-2)^{22}$ și 3^{11};

e) $(-2)^{555}$ și $(-3)^{333}$.

38. Efectuați:

$$\left\{3 \cdot (+5)^2 - 3 \cdot \left[4 + (-3)^2 - (-1)^5\right] \cdot \left[4 \cdot (-2)^3 - 8 \cdot (-2)^3\right]\right\} \cdot (-2)^3.$$

39. Efectuați: a) $(-2)^{1997} : (-2)^{1996}$;

b) $(-2)^{1997} : \left[(-2)^{1996} + 3 \cdot (-2)^{1995}\right]$;

c) $(-2)^{1997} : \left[(-2)^{1996} + (-2)^{1995} - (-2)^{1994}\right]$.

40. Calculați: a) $(-1)^n + (-1)^{n+1} + (-1)^{n+2} + (-1)^{n+3}$; $n \in \mathbf{N}$.

b) $(-1)^n + (-1)^{2n} + (-1)^{3n} + (-1)^{4n}$; $n \in \mathbf{N}$;

c) $(-1)^n + (-1)^m + (-1)^p + (-1)^{n+m+p}$; $n, m, p \in \mathbf{N}$.

41. Efectuați: a) $\left(50 - 5^2\right)\left(50 - 6^2\right)\left(50 - 7^2\right)$;

b) $\left(100 - 5^2\right)\left(100 - 6^2\right)\left(100 - 7^2\right) \ldots \left(100 - 11^2\right)$.

42. Calculați suma: $1 \cdot (-1)^2 + 2 \cdot (-1)^3 + 3 \cdot (-1)^4 + \ldots + 99 \cdot (-1)^{100}$.

43. Aflați cea mai mică și cea mai mare valoare a expresiei:

$E = (-1)(-1)^m + (-3)(-1)^n + (-5)(-1)^p - 9$, unde $m, n, p \in \mathbf{N}$.

44. Calculați suma: $(-1)^1 + (-1)^{1+2} + (-1)^{1+2+3} + \ldots + (-1)^{1+2+3+\ldots+1996}$.

45. Aflați toate valorile expresiei: $(-1)^m + (-1)^{m+n} + (-1)^{m+n+p}$, unde $m, n, p \in \mathbf{N}$.

46. Calculați: $\left|2^{33} - 3^{22}\right| + \left|81^6 - 9^{11}\right| + \left|8^{11} - 2^{32}\right| - 3^{24} + 4^{16}$.

47. Aflați toate perechile de numere întregi care au produsul egal cu -12.

48. Aflați tripletele de numere întregi care au produsul egal cu -3.

49. Suma unor numere întregi negative consecutive este -45. Aflați numerele.

50. Pentru ce numere întregi x și y avem: $xy^2 = y^2 + 36$.

51. Aflați numerele întregi m și n pentru care $m^2 - n^2 = 1$.

52. Aflați numerele întregi x și y care verifică una din condițiile următoare:

a) $|x - y| + (x - 1)^2 = 0$; b) $|x - 10| + (x - y)^2 = 0$.

Scanned with OKEN Scanner

53. Există numere întregi x și y care să satisfacă simultan relațiile:
$x+y\le 1$; $y+x^2\ge 0$; $x-x^2\ge 0$?

54. Găsiți numerele întregi x și y cu proprietatea: $xy+3x-3y=15$.

55. Pentru care numere întregi x, y, z avem: $x^2+(y-1)^2+(z-2)^2\le 3$?

56. Aflați numerele întregi x, y, z care satisfac egalitatea: $x(y-1)(z-2)=3$.

57. Arătați că: $\frac{2n-1+3(-1)^{2n-1}}{4}\in \mathbf{Z}$, $(\forall)n\in \mathbf{N}$.

58. Este posibil ca suma unor numere întregi consecutive să fie 1996?

59. Găsiți tripletele de numere întregi consecutive cu suma egală cu produsul lor.

60. Determinați $x, y, z\in \mathbf{Z}$ astfel încât:
$x^2-1<2x+y-z$; $y^2+2<2y+z-x$; $z^2-3<2z+x-y$.

61. Aflați numerele $x, y, z\in \mathbf{Z}$ știind că: $x(y+z)=1$; $xy+yz+xz=-5$; $xyz=6$.

62. Arătați că nu există nici o pereche de numere întregi (a, b) care să verifice relațiile:
$ab-a=4$ și $ab-b=10$.

63. Produsul a trei numere întregi consecutive este 60. Aflați numerele.

64. Suma pătratelor a trei numere întregi consecutive este 50. Aflați numerele.

65. Aflați numerele întregi x, y cu proprietatea: $x(y-1)=y+1$.

66. Găsiți toate numerele întregi n pentru care n^2+2 este divizibil cu $n+2$.

67. Aflați $x\in \mathbf{Z}$ pentru care $\frac{2x^2+3x+9}{2x+3}\in \mathbf{Z}$.

68. Arătați că suma și diferența pătratelor a două numere întregi consecutive sunt numere impare.

69. Există $n\in \mathbf{Z}$ pentru care $\frac{2n+1}{3n+2}\in \mathbf{Z}$?

70. Există $n\in \mathbf{Z}$ pentru care $\frac{5n-1}{4}$ și $\frac{7n-3}{4}$ să fie simultan numere întregi?

71. Arătați că $n(n-1)(n+1)\left(n^2+1\right)$ este divizibil cu 5 ($n\in \mathbf{Z}$).

72. Dacă $a, b\in \mathbf{Z}$, $a\neq 0$, $b\neq 0$, atunci cel puțin unul dintre numerele $\frac{a}{3}$, $\frac{b}{3}$, $\frac{a-b}{3}$, $\frac{a+b}{3}$ este întreg.

73. Dacă $x, y, z\in \mathbf{Z}$ și $x(y+1)=x(z+1)-z(y-z)+2$, atunci $|x+y|=3$.

74. Dacă $n\in \mathbf{Z}$, atunci: $\frac{(n-7)(n-3)(n+1)(n+4)}{20}\in \mathbf{Z}$.

75. Fie $a, b, c\in \mathbf{Z}^*$, astfel încât $\frac{1}{a}+\frac{1}{c}=\frac{2}{b}$. Arătați că: $\frac{b+a}{b-a}=\frac{b+c}{b-c}\in \mathbf{Z}$.

*
* *

Scanned with OKEN Scanner

CAP. III. • NUMERE RAȚIONALE •

1. Câte fracții cu numărătorul -1 și numitorul număr întreg cuprins între -5 și 5 există ? Care este cea mai mare și care este cea mai mică asemenea fracție ?

2. Aflați suma tuturor fracțiilor cu numărătorul $a \in \{-3,-2,-1\}$ și numitorul $b \in \{1,2,3\}$.

3. Scrieți toate fracțiile de forma $\frac{a}{b}$, $a, b \in \mathbf{Z}$ știind că $|a| = 2$ și $|b| \leq 3$.

4. Aflați fracțiile $\frac{a}{b}$, $a, b \in \mathbf{Z}$ știind că $|a| \leq 2$ și $|b| = 3$.

5. Găsiți numerele de forma $\frac{a}{b}$ cu $a, b \in \mathbf{Z}$ care au proprietatea: $-15 \leq b < a < -10$.

6. Completați fracțiile următoare, astfel încât două câte două să fie echivalente: $\frac{\square}{-3}$; $\frac{-2}{\square}$; $\frac{5}{\square}$; $\frac{\square}{15}$; $\frac{\square}{6}$; $\frac{-4}{\square}$. *Găsiți mai multe soluții* !

7. Fie $a, b \in \mathbf{Z}$. Găsiți numerele raționale x și y a căror sumă este a și a căror diferență este b. În ce condiții x și y sunt numere întregi ?

8. Comparați numerele:

a) $\left|-\frac{2}{3}\right|$ și $\left|-\frac{3}{4}\right|$; b) $-\left|-\frac{3}{2}\right|$ și $-\left|-\frac{4}{3}\right|$; c) $\left|-\frac{2}{3}\right|$ și $-\left|-\frac{2}{3}\right|$; d) $\left|-\frac{4}{5}\right|$ și $\left|+\frac{4}{4}\right|$.

9. Comparați numerele: a) $-\frac{7}{8}$ și $-\frac{9}{10}$; c) $-\frac{202}{201}$ și $-\frac{302}{301}$;

b) $-\frac{8}{7}$ și $-\frac{10}{9}$; d) $-\frac{202}{203}$ și $-\frac{302}{303}$.

10. Stabiliți valoarea de adevăr a propozițiilor:

p_1 :„ $\left(\frac{1}{2}+\frac{4}{6}+\frac{8}{10}+\ldots+\frac{1994}{1996}\right)\cdot\left(\frac{2000}{5000}-\frac{8}{20}\right)=1$ ”

p_2 :„ $\left(\frac{112}{336}+\frac{45}{135}+\frac{150}{450}\right)\cdot\frac{513}{171}=3$ ”.

11. Calculați $\frac{2+a+b}{2-a+b}$, unde $a = 1\frac{1}{3}+2\frac{1}{3}+3\frac{1}{3}$, iar $b = 1\frac{2}{3}+2\frac{1}{3}-12\frac{3}{3}$.

12. Efectuați: a) $\frac{5}{4}-\frac{5}{4}\cdot\left\{1-\frac{5}{4}:\left[1+\frac{5}{4}\cdot\left(1-\frac{4}{5}\right)\right]\right\}$;

b) $\left\{\left[\left(\frac{5}{4}-1\right)\cdot\frac{4}{5}+1\right]:\frac{4}{5}+1\right\}\cdot\frac{4}{5}-1\frac{4}{5}$.

13. Efectuați în două moduri: a) $\left(4\frac{1}{3}-3\frac{4}{3}-2\frac{5}{4}\right)\cdot\left(-\frac{12}{3}\right)$;

b) $\left(-3\frac{7}{15}-2\frac{1}{15}+4\frac{1}{5}\right)\cdot\left(-3\frac{3}{4}\right)$.

Scanned with OKEN Scanner

14. Arătați că: $\left(1+\frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}-\frac{1}{6}}\right)\cdot\left(1-\frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}+\frac{1}{6}}\right)-\left(1+\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}-\frac{1}{6}}\right)\cdot\left(1-\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}+\frac{1}{6}}\right)=\frac{1}{2}$.

15. Efectuați: a) $\frac{45\frac{10}{63}-44\frac{25}{84}}{\left(2\frac{1}{3}-1\frac{1}{9}\right):4-\frac{3}{4}}:\frac{31}{16}$;

b) $\left[41\frac{29}{72}-\left(18\frac{7}{6}-5\frac{1}{4}\right)\cdot\left(10\frac{1}{2}-7\frac{2}{3}\right)\right]:15\frac{7}{9}+\frac{7}{8}$.

16. Efectuați: a) $1\frac{13}{35}\cdot\left[\left(7\frac{1}{9}-2\frac{14}{15}\right):\left(2\frac{2}{3}+1\frac{3}{5}\right)-\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{20}\right)\left(\frac{5}{7}-\frac{5}{14}\right)\right]$;

b) $\left(40\frac{49}{60}-41\frac{23}{84}\right)\cdot\left\{\left[4-3\frac{1}{2}\left(2\frac{1}{7}-1\frac{1}{5}\right)\right]:\frac{8}{25}\right\}$.

17. Arătați că: $\frac{-5-10-15-\ldots-500}{3+6+9+\ldots+300}=-\frac{5}{3}$.

18. Efectuați: $\frac{1-2}{1-2+3}\cdot\frac{1-2+3-4}{1-2+3-4+5}\cdots\frac{1-2+3-4+\ldots+99-100}{1-2+3-4+\ldots-100+101}$.

19. Efectuați: $\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{98}-\frac{1}{100}}{-\frac{1}{3}+\frac{1}{6}-\frac{1}{9}-\frac{1}{12}-\ldots-\frac{1}{147}+\frac{1}{150}}$.

20. Comparați numerele: a) $\left(\frac{1}{2}\right)^{51}$ și $\left(\frac{1}{4}\right)^{26}$; b) $\left(-\frac{3}{5}\right)^{73}$ și $\left(-\frac{4}{5}\right)^{73}$;

c) $\left(-\frac{2}{3}\right)^{36}$ și $\left(-\frac{8}{27}\right)^{12}$; d) $\left(-\frac{2}{3}\right)^{-2}$ și $\left(-\frac{3}{4}\right)^{-2}$.

21. Dacă $2x=3y=1$, arătați că:

a) $\frac{x+y}{x-y}=5$; b) $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}=13$; c) $\left(\frac{3-5x}{8y-5x}\right)^2=\frac{5x^2-4x+1}{5x^2-16xy+13y^2}$.

22. Efectuați: a) $\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)-\left[\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{3}\right)^2\right]$;

b) $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2\cdot3}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{2\cdot3}\right)-\left[\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2-\left(\frac{1}{2\cdot3}\right)^2\right]$;

23. Efectuați: a) $\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{-5}\right]^{-7}+\left[\left(-\frac{1}{2}\right)^{-7}\right]^{-5}+\left(-\frac{1}{4}\right)^{35}+\left(-\frac{1}{2}\right)^{70}$;

b) $\left[\left(-\frac{2}{3}\right)^{-5}\right]^{-6}:\left(\frac{2}{3}\right)^{28}$; c) $\left(-\frac{4}{25}\right)^{28}:\left(\frac{2}{5}\right)^{56}$.

24. Efectuați: a) $\left(-\frac{3}{2}\right)(-5+3)+\left(-\frac{2}{3}\right)(-1-2)+\left(-\frac{3}{2}\right)^{1996}\cdot\left[-\left(\frac{2}{3}\right)^{1995}\right]$;

Scanned with OKEN Scanner

b) $\left[\left(-\frac{1}{3}\right)^{n+2}-\frac{1}{3^{n+2}}+\frac{1}{3^{n+1}}\right]\cdot(-3)^n$; $n\in\mathbf{N}$.

25. Efectuați: $\frac{1}{2}(-1)^n+\frac{3}{4}(-1)^{n+1}+\frac{5}{6}(-1)^{n+2}$, unde $n\in\mathbf{N}$.

26. Arătați că: a) $\left(1-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}-\frac{3}{4}\right)^2<\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}$;

b) $\left(\frac{2}{1}-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{2}-\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{4}{3}-\frac{3}{4}\right)^2>\frac{2^2-1}{2}+\frac{3^2-2^2}{2\cdot3}+\frac{4^2-3^2}{3\cdot4}$.

27. Efectuați: a) $\frac{1}{\left(3^2\right)^{-2}}+\frac{1}{(-5)^{-3}}-\left(10:\frac{1}{(-5)^{-1}}\right)^2+\left[(-2)^3\right]^2$;

b) $\frac{1}{(-2)^{-2}}\cdot(-3)^{-2}\cdot\frac{1}{\left(-3^2\right)^{-3}}:\left[(-2)^3\cdot\frac{1}{3^{-2}}\right]$;

c) $\left\{\frac{1}{(2\cdot3)^{-1}}:\left[2\cdot3^{-1}\cdot5^{-1}+3^{-2}+\frac{1}{5^2}+\frac{(-2)^2}{\left(-3^2\right)(-5)^2}\right]\right\}\cdot\left(5^{-1}-\frac{-2}{(-3)(-5)}+3^{-1}\right)$.

28. Aflați cea mai mare valoare pe care o poate lua expresia:

$E=\frac{1}{3}(-1)^{m+n+2}+\frac{1}{4}(-1)^{m+n}-\frac{1}{6}(-1)^m+\frac{1}{2}(-1)^{n+1}$; $m, n\in\mathbf{N}$.

29. Care este cea mai mică valoare ce o poate lua expresia:

$E=\frac{1}{2}(-1)^{m+n}+\frac{1}{5}(-1)^{n+2p}+\frac{1}{10}(-1)^{p+3m}+$, unde $m, n, p\in\mathbf{N}$.

30. Există $n\in\mathbf{N}$, astfel încât: $\frac{1}{2}(-1)^n-\frac{1}{3}(-1)^{n+1}+\frac{1}{6}(-1)^{n+2}=-1$?

31. Aflați toate valorile expresiei: $\frac{(-1)^m+(-1)^n+(-1)^p}{(-1)^m+(-1)^{m+n}+(-1)^{m+n+p}}$; $m, n, p\in\mathbf{N}$.

32. Arătați că: a) $\frac{5^{-1}+5^{-2}+5^{-3}}{6^{-3}+6^{-2}+6^{-1}}\cdot\left(\frac{31}{43}\right)^{-1}:\left(\frac{5}{6}\right)^{-2}=\left(\frac{5}{6}\right)^{-1}$;

b) $\left\{\left[\frac{2}{\left(-\frac{2}{4}\right)^{-4}}+\frac{3}{\left(-\frac{4}{3}\right)^{-3}}\right]\cdot\left[2\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)^{-4}-3\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)^{-3}\right]\right\}:$

$:\left\{4\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{-4}\right]^{-2}-9\left[\left(-\frac{4}{3}\right)^{-2}\right]^{-3}\right\}=1$.

33. Fie $A=\frac{1}{3}xy^3z^7$, $B=-x^2yz^9$, $C=-\frac{2}{3}x^3y^8$, unde $x, y, z\in\mathbf{Q}-\{0$. Este posibil ca A, B, C să aibă toate același semn ? Pentru ce valori ale lui x, y, z exact două dintre numerele A, B, C au același semn ?

Scanned with OKEN Scanner

34. Ce număr rațional împărțit la cincimea lui, dă ca rezultat 5 ?

35. Ce număr trebuie să scădem din numărătorul și numitorul fracției $\frac{3}{4}$ pentru ca fracția să se dubleze ? Dar pentru ca fracția să se înjumătățească ?

36. Diferența a două numere este $2\frac{2}{3}$, iar un număr este de 7 ori mai mare decât celălalt. Care sunt numerele ?

37. Diferența a două numere este 10, iar câtul împărțirii lor este $1\frac{15}{16}$. Să se găsească cele două numere.

38. Dacă înmulțim un număr cu $2\frac{1}{4}$, produsul obținut este cu $\frac{1}{2}$ mai mic decât al doilea număr, iar dacă primul număr îl împărțim la $\frac{7}{36}$, câtul obținut este cu $\frac{11}{4}$ mai mare decât al doilea număr. Să se afle cele două numere.

39. Împărțiți numărul 310 în trei părți astfel încât a doua parte să fie $\frac{3}{5}$ din prima și $\frac{3}{2}$ din a treia.

40. Câte tone de țiței sa extras o sondă într-un trimestru știind că în prima lună a extras $\frac{3}{8}$ din cantitatea respectivă, a doua lună a extras $36\frac{3}{4}$ tone țiței, iar a treia lună $\frac{1}{3}$ din cantitatea de țiței extras în primele două luni.

41. Fie numerele $a = 2 \cdot \left\{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - 1\right)\right]\right\}$ și

$$b = |0,(1) - 2| + |0,(2) - 3| - |0,(3) - 4|.$$

a) Să se calculeze media aritmetică și media armonică a numerelor a și b;

b) Să se calculeze media ponderată a numerelor a și b cu ponderile $p_a = 2$ și $p_b = \frac{1}{2}$.

42. Să se calculeze media aritmetică , media armonică și media ponderată a numerelor:

$$a = \frac{(-1)(-2+3)+4:\left(5-6^0\right)}{\left(-5^{1992}\right):\left(-5^{1991}\right)} + \frac{1}{2}\ ;\ b = \frac{-3}{-\frac{1}{2}} - \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}} \text{ și}$$

$$c = \left(\frac{1}{4} - \frac{5}{6}\right) : \frac{5}{12} + \left|0,75 - \frac{9}{2}\right| - \frac{1}{17} \cdot \left(0,(6) + \frac{3}{4}\right) - \frac{34}{15} + \frac{1}{3},$$

cu ponderile respectiv $p_a = \frac{2}{3}$, $p_b = \frac{1}{2}$ și $p_c = \frac{3}{4}$.

43. Media aritmetică a cinci numere este $\frac{13}{5}$. Găsiți un număr care împreună cu cele cinci numere date să aibă media aritmetică $\frac{18}{5}$.

44. Să se afle numerele a, b, c, d (în această ordine) știind că media lor aritmetică este 2,(7) și că fiecare începând cu al doilea se obține din cel precedent adăugând 1,(1).

45. Rezolvați în $\mathbf{Q}$ ecuațiile:

a) $\frac{4}{17} - \left(x - \frac{5}{51}\right) = \frac{1}{6}$; b) $\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x + \frac{1}{6}x = 1$;

Scanned with OKEN Scanner

c) $\frac{1}{4}(4-3x)-\frac{3}{4}(2x-3)=1$; d) $\left(\frac{25}{72}x-\frac{9}{11}\right)-\left(\frac{3}{8}x-\frac{5}{9}\right)=\frac{7}{99}$.

46. Aflați numerele întregi x, y, z știind că $2x=3y=9z$ și $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}>\frac{14}{37}$.

47. Scrieți numărul 55 ca sumă a trei numere naturale, astfel încât primul adunat cu pătrimea celui de-al doilea, al doilea adunat cu treimea celui de-al treilea și al treilea adunat cu doimea primului să reprezinte numere naturale egale.

48. Rezolvați în mulțimea numerelor naturale ecuația: $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{3}$.

49. Fie $a, b, c \in \mathbf{Q}^*$, astfel încât $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$. Arătați că: $\frac{a}{b}=\left(\frac{a+c}{b+c}\right)^2$.

50. Fie $a, b, c, d \in \mathbf{Q}$, astfel încât $b=\frac{a+c}{2}$ și $\frac{1}{c}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{d}\right)$. Arătați că $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$.

51. Fie $a, b, c, d \in \mathbf{Q}$ astfel încât $\frac{a}{b}=\frac{b+c}{a+d}$ și $\frac{c}{d}=\frac{b+d}{a+c}$. Demonstrați că numerele $\frac{a+b}{c+d}+\frac{c-d}{a-b}$ și $\frac{a-b}{c-d}-\frac{c+d}{a+b}$ sunt întregi.

52. Fie $a \in \mathbf{Q}_+^*$. Precizați care dintre numerele $a, a^2, a^3, \ldots, a^{10}$ este cel mai mare și care este cel mai mic.

53. Determinați numerele întregi n, pentru care: $-\frac{1}{5}<-\frac{2}{n^2}<-\frac{1}{10}$.

54. Fie $a, b \in \mathbf{Q}$, $a<b$. Arătați că $a<\frac{a+1993\cdot b}{1994}<b$ și $a<\frac{1993\cdot a+b}{1994}<b$.

55. Demonstrați că: $\frac{1}{3}<\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{1994^2}<\frac{3}{4}$.

56. Demonstrați că dacă $a, b, c, d \in \mathbf{N}^*$ și $\frac{a}{b}<\frac{c}{d}$, atunci:

$$\frac{a}{b}<\frac{ma+nc}{mb+nd}<\frac{c}{d},\ (\forall)\, m, n \in \mathbf{Q}_+^*.$$

57. Pentru ce valori ale lui $n \in \mathbf{Z}$ se simplifică fracțiile:.

a) $\frac{n^2+4}{n^2-1}$; b) $\frac{n^3+1}{n^3+8}$; c) $\frac{n^2+1}{2n^2+9}$.

58. Să se determine valorile întregi ale lui x, pentru care fracția $\frac{1995\cdot x+1}{1996\cdot x+2}$ este reductibilă. Să se simplifice fracția pentru $x=1994$.

59. Să se determine $x, y \in \mathbf{Z}_+$ pentru care: $\frac{x^2}{x+1}+\frac{y^2}{y+1} \in \mathbf{Z}$.

60. Să se determine $x \in \mathbf{Z}-\{-3, -2\}$, astfel încât $\frac{x^2}{x+2}+\frac{x^2}{x+3} \in \mathbf{Z}$.

*

* *

Scanned with OKEN Scanner

CAP. IV. • RĂDĂCINA PĂTRATĂ •

1. Aflați pătratele următoarelor numere:

$$3;\ -3;\ \frac{2}{5};\ -0,5;\ -\frac{4}{3};\ 1,(3);\ 0,5(3);\ 3\frac{1}{2};\ \frac{2}{3}-\frac{1}{2};\ 4:\frac{2}{5}.$$

2. Determinați pătratele perfecte mai mici decât 1000.

3. Arătați că numerele naturale care au ultima cifră 2, 3, 7 sau 8, nu sunt pătrate perfecte.

4. Arătați că următoarele numere nu sunt pătrate perfecte:

a) $6^{1996}+1$; b) $3^{1997}+5^{1996}$; c) $1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot 1996-13$;

d) $\underbrace{11\ldots1}_{\text{1995 cifre}}$; e) $\underbrace{66\ldots6}_{\text{1996 cifre}}$; f) $\overline{aa\ldots a15}$ (a este o cifră nenulă).

5. Arătați că numerele următoare nu pot fi pătrate perfecte, oricare ar fi n număr natural nenul.

a) $5n+2$; b) $5n+3$; c) $5n-7$; d) 6^n+2;

e) 15^n+3; f) $\overline{n45}$; g) $\overline{n1234}$.

6. Arătați că numerele următoare sunt iraționale:

a) $\sqrt{7}$; b) $1+\sqrt{3}$; c) $\sqrt{5}-\frac{2}{3}$; d) $\sqrt{3^{100}+2^{101}}$.

7. Determinați numerele x, știind că:

a) $\sqrt{x}=4$; b) $\sqrt{144}=x$; c) $\sqrt{(-3)^4}=x$; d) $\sqrt{x}=(-17)^2$;

e) $\sqrt{x+1}=1$; f) $13+\sqrt{x}=19$; g) $\sqrt{3x}=27$; h) $\sqrt{2x-7}=1$.

8. Calculați rădăcina pătrată din numerele:

576; 1521; 688900; 10404; 9006001; 833569; 622521; 9120400; 774400; 980100.

9. Calculați cu aproximație de o unitate prin lipsă:

a) $\sqrt{17}$; b) $\sqrt{123}$; c) $\sqrt{1996}$; d) $\sqrt{11004}$; e) $\sqrt{33488}$.

10. Calculați $[n]$ când n este egal cu:

a) $\sqrt{39}$; b) $\sqrt{231}$; c) $\sqrt{23409}$; d) $-\sqrt{1536}$; e) $1+\sqrt{17}$.

11. Calculați rădăcina pătrată din numerele:

10,89; 30,25; 0,0121; 0,0484; 0,4356; 0,009801.

12. Calculați cu aproximație de $\frac{1}{10}$ prin lipsă:

$\sqrt{12}$; $\sqrt{123}$; $\sqrt{1234}$; $\sqrt{459,11}$; $\sqrt{34,12345}$; $\sqrt{989,78}$.

13. Calculați cu aproximație de $\frac{1}{100}$ prin lipsă:

a) $\sqrt{0,12}$; b) $\sqrt{0,123}$; c) $1+\sqrt{7}$; d) $\sqrt{15}-3$; e) $\sqrt{19}+\sqrt{29}$.

14. Calculați: $\sqrt{2^8}$; $\sqrt{3^4\cdot 5^2}$; $\sqrt{3^6}$; $\sqrt{2^5\cdot 2^7}$; $\sqrt{2^{11}:2^5}$;

$\sqrt{7^3\cdot 7^4\cdot 7^5:7^8}$; $\sqrt{5\cdot 3\cdot 125\cdot 27}$; $\sqrt{0,01\cdot 40\cdot 10\cdot 0,04}$.

15. Determinați cifrele x și y astfel încât următoarele numere să fie naturale:

a) $\sqrt{\overline{1xy}}$; b) $\sqrt{\overline{412x9}}$; c) $\sqrt{\overline{7xy1}}$; d) $\sqrt{\overline{64xy9}}$.

16. Determinați cifrele a și b astfel încât următoarele numere să fie raționale:

Scanned with OKEN Scanner

a) $\sqrt{\overline{40,ab}}$; b) $\sqrt{\overline{8a,b9}}$; c) $\sqrt{\overline{87,7ab9}}$; d) $\sqrt{\overline{0,0ab1}}$.

17. Calculați: a) $\sqrt{\frac{36}{25}}$; b) $\sqrt{\frac{169}{196}}$; c) $\sqrt{\frac{2025}{1225}}$;

d) $\sqrt{\frac{3}{363}}$; e) $\sqrt{\frac{2^{16}}{4^8}}$; f) $\sqrt{\frac{9^{24}}{27^8}}$; g) $\sqrt{\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{3}\cdot 216\cdot 27}$;

h) $\sqrt{3-\frac{3}{4}}$; i) $\sqrt{12\frac{1}{4}}$; j) $\sqrt{13-\frac{1}{25}}$; k) $\sqrt{132\frac{1}{4}}$.

18. Calculați: a) $\sqrt{10}\cdot\sqrt{250}$; b) $\sqrt{3}\cdot\sqrt{27}$; c) $\sqrt{3}\cdot\sqrt{11}\cdot\sqrt{33}$;

d) $\sqrt{\frac{2}{9}}\cdot\sqrt{8}$; e) $\sqrt{\frac{20}{7}}\cdot\sqrt{\frac{5}{7}}$; f) $\sqrt{3}\cdot\sqrt{6}\cdot\sqrt{12}\cdot\sqrt{24}$.

19. Calculați: a) $\sqrt{2^2+3\cdot 7}$; b) $3\sqrt{121}-2\sqrt{144}$;

c) $\sqrt{17^2-15^2}$; d) $\sqrt{130^2-126^2}$; e) $\sqrt{24^2+10^2}$.

20. Determinați numerele naturale x, știind că:

a) $\sqrt{\frac{600}{x}}\in\mathbf{N}$; b) $\sqrt{\frac{720}{x+1}}\in\mathbf{N}$; c) $\sqrt{24x}\in\mathbf{N}$ și $x<50$; d) $\sqrt{\frac{120}{x}}\in\mathbf{Q}$ și $x<1000$.

21. Comparați numerele:

a) $5\sqrt{2}$ și $4\sqrt{3}$; b) $-3\sqrt{2}$ și $-2\sqrt{3}$; c) $-\sqrt{2}$ și $-\frac{3}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$; d) $2-\sqrt{3}$ și $\sqrt{5}-2$.

22. Ordonați crescător numerele: a) $-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4}}; -\frac{\sqrt{3}}{4}; -\frac{3}{\sqrt{2}}; -\frac{3}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}; -\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{2}}$;

b) $-4\sqrt{11}$; $-5\sqrt{7}$; $-6\sqrt{5}$; $-7\sqrt{4}$; $-8\sqrt{3}$.

23. Verificați egalitățile: a) $\sqrt{9}+\sqrt{625}+\sqrt{1444}=\sqrt{49}+\sqrt{400}+\sqrt{1521}$;

b) $\sqrt{2601}+\sqrt{144}+\sqrt{4356}=\sqrt{1225}+\sqrt{400}+\sqrt{5476}$.

24. Calculați: a) $\sqrt{(-2)^2}-\sqrt{(-3)^2}$;

b) $\sqrt{(-2)^6}+\sqrt{(-3)^4}$; c) $\sqrt{(-8)^2}+\sqrt{11^2}-\sqrt{(-6)^4}$.

25. Calculați: a) $\sqrt{72}:\sqrt{2}$; b) $\sqrt{120}:\sqrt{30}$; c) $\sqrt{75}:\sqrt{25}$; d) $\sqrt{14}:\sqrt{\frac{8}{7}}$.

26. Scrieți mulțimile următoare, enumerând elementele lor:

a) $A=\{x\,|\,x\in\mathbf{N},\ \sqrt{3}\le x<\sqrt{17}\}$; b) $B=\{x\,|\,x\in\mathbf{Z},\ 2-\sqrt{5}<x<2+\sqrt{5}\}$;

c) $C=\{n\,|\,n\in\mathbf{N},\ \sqrt{n}\in\mathbf{N},\ \sqrt{n}<10\}$; d) $D=\left\{x\,|\,x\in\mathbf{Z},\ \frac{9-\sqrt{5}}{2}\le x<\frac{9+\sqrt{5}}{2}\right\}$;

e) $E=\{x\,|\,x\in\mathbf{Z},\ 2\sqrt{3}-10\le x\le 2\sqrt{5}+4\}$.

27. Aflați numărul x din proporțiile:

a) $\frac{x}{3\sqrt{3}}=\frac{5\sqrt{3}}{9}$; b) $\frac{5\sqrt{7}}{x}=\frac{10}{\sqrt{14}}$; c) $\frac{25}{9\sqrt{2}}=\frac{x}{3\sqrt{8}}$; d) $\frac{15}{8\sqrt{11}}=\frac{5\sqrt{44}}{x}$.

Scanned with OKEN Scanner

28. Calculați: a) $2\sqrt{3}-5\sqrt{3}$; b) $7\sqrt{7}+2\sqrt{11}-3\sqrt{7}-2\sqrt{11}$;
c) $5\sqrt{12}-7\sqrt{18}-2\sqrt{75}+3\sqrt{98}$; d) $7\sqrt{3}-\sqrt{275}+\sqrt{48}+\sqrt{176}-\sqrt{300}$;
e) $\left(5\sqrt{252}-6\sqrt{112}-2\sqrt{63}\right)\cdot\sqrt{28}$; f) $\left(2\sqrt{45}-\sqrt{20}+3\sqrt{80}\right):\sqrt{245}$.

29. Calculați: a) $\sqrt{\left(1-\sqrt{2}\right)^2}-\sqrt{2}$; b) $\sqrt{\left(\sqrt{3}-2\right)^2}+\left|\sqrt{3}-5\right|+2\sqrt{3}$;
c) $\sqrt{\left(2-\sqrt{3}\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)^2}+\sqrt{\left(4-\sqrt{17}\right)^2}-\sqrt{\left(\sqrt{17}-4\right)^2}$;
d) $2\sqrt{3}-\sqrt{(-3)^2}+\left|1-\sqrt{3}\right|+\left|\sqrt{27}-6\right|$.

30. Efectuați: a) $\sqrt{2}+\sqrt{8}+\sqrt{18}+\sqrt{32}+\sqrt{50}+\ldots+\sqrt{200}$;
b) $\sqrt{2}+\sqrt{18}+\sqrt{50}+\sqrt{98}+\ldots+\sqrt{722}$.

31. Determinați perimetrul unui pătrat știind că aria lui este:
a) $23409\,\text{m}^2$; b) $547,56\,\text{cm}^2$; c) $9,1204\,\text{dm}^2$.

32. Suma ariilor a două pătrate este $2153\,\text{m}^2$, iar diferența lor este $585\,\text{m}^2$. Calculați lungimile laturilor celor două pătrate.

33. Să se determine numerele naturale mai mici decât 1185 care la extragerea rădăcinii pătrate cu o unitate prin lipsă dau restul 62.

34. Arătați că dacă $x<0$, atunci: $|x|+\sqrt{x^2}-|x-1|+\sqrt{(1-x)^2}+2x=0$.

35. Arătați că numărul $\sqrt{\overline{xxxx}}$ este irațional, oricare ar fi cifra nenulă x.

36. Înlocuiți steluțele cu cifrele corespunzătoare:

a)
$$\begin{array}{r|l}\sqrt{***} & ** \\ \hline * & ** \\ \hline *** & \\ *** & \\ \hline === & \end{array}\cdot 4 = 1**$$

;

b)
$$\begin{array}{r|l}\sqrt{****} & ** \\ \hline * & ** \\ \hline =4** & \\ *** & \\ \hline === & \end{array}\cdot * = ***$$

37. Calculați media aritmetică și media geometrică a numerelor:
a) $2\sqrt{2}$ și $\sqrt{2}$; b) $5\sqrt{3}+\sqrt{75}$ și $2\sqrt{27}$;
c) $\sqrt{10}+\sqrt{40}-\sqrt{90}-\sqrt{160}+\sqrt{250}$ și $\sqrt{10}+\sqrt{40}-\sqrt{360}-\sqrt{1440}+\sqrt{4000}$.
d) $\frac{27}{5}$ și $\frac{5}{3}$; e) $\sqrt{\frac{25}{144}}$ și $\sqrt{\frac{64}{576}}$.

38. Să se determine cel mai mic pătrat perfect ale cărui prime patru cifre sunt 1; 9; 8; 8.

39. Determinați numerele $\overline{ab}$, știind că a, b sunt cifre nenule și diferite și că $\sqrt{\overline{ab}-\overline{ba}}\in\mathbf{N}$.

40. Arătați că numerele $\sqrt{2^n+1}$ și $\sqrt{2\cdot 3^n+9}$ nu pot fi simultan numere naturale ($n\in\mathbf{N}$).

41. Efectuați: $\sqrt{\dfrac{\left(4^5\cdot 27^4\cdot 14^2\cdot 7\right):\left(16\cdot 36^2\cdot 7^4\right)}{3^4\cdot 16\cdot 9^3:7}}$.

42. Dacă $n^4=23,4256$ să se calculeze n^7, $n\in\mathbf{Q}_+$.

*
* *

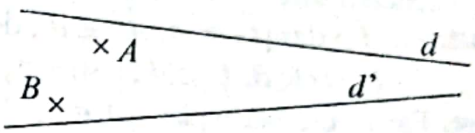
CAP. V. • INTRODUCERE ÎN GEOMETRIE •

• Puncte • Drepte • Semidrepte • Segmente •

1. Realizați un desen astfel ca punctele A, B, C, D să satisfacă simultan condițiile:
a) $A = B$; b) $C \neq D$; c) B, C, D sunt puncte coliniare.

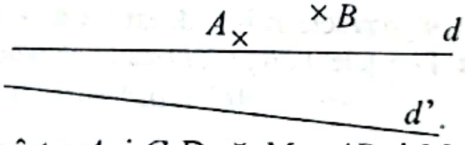
2. Desenați patru puncte A, B, C, D, distincte două câte două, astfel ca dreptele AB și CD să coincidă. Ce puteți afirma despre dreptele AC și BD?

3. Marcați pe figura alăturată un punct care aparține dreptei d și care este coliniar cu punctele A și B. Aceeași problemă pentru un punct ce aparține dreptei d'.



4. Într-un plan desenați o dreaptă d și punctele A, B, C, D, E astfel încât să fie satisfăcute simultan condițiile: a) A și B să fie de aceeași parte a dreptei d; b) B și C să fie de aceeași parte a dreptei d; c) C și D să fie de o parte și de alta a dreptei d; d) $E \in d$ și C, E, D coliniare. Ce puteți afirma despre poziția în raport cu d a punctelor: A și C; B și D; A și D?

5. Cum alegem un punct C pe dreapta d și un punct D pe dreapta d' în figura alăturată, pentru ca simultan punctele A, C, D și B, C, D să fie coliniare?



6. Fie A, B, C trei puncte coliniare, astfel încât B este între A și C. Dacă $M \in AB$ și M este între A și B, iar $N \in BC$ și N este între B și C, care dintre următoarele propoziții este adevărată: a) M este între B și N; b) B este între M și N; c) N este între B și M?

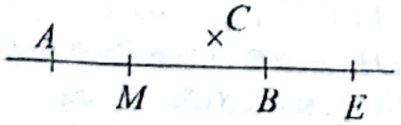
7. Se dau 6 puncte distincte în plan astfel încât oricare 3 să nu fie coliniare. Se unesc două câte două aceste puncte. Câte drepte se obțin? Arătați că numărul acestor drepte este egal cu suma primelor 5 numere naturale sau cu semiprodusul numerelor 5 și 6. Generalizare pentru n puncte distincte, oricare 3 necoliniare.

8. Fie A, B, C, D patru puncte distincte în plan. Dacă A, B, C sunt pe aceeași dreaptă d și $D \notin d$, câte drepte distincte determină două câte două punctele A, B, C, D?

9. Construiți în plan patru drepte care se intersectează două câte două în puncte distincte. Arătați că se obțin astfel șase puncte de intersecție. Câte drepte noi obținem unind aceste puncte două câte două?

10. Fie A, B, C trei puncte necoliniare. Câte semidrepte puteți trasa având ca origine unul din cele trei puncte și care conțin încă unul dintre punctele date?

11. Utilizând simbolurile " $\in$ " și " $\notin$ " și figura următoare, completați:



$M \ldots [AB]$; $E \ldots [AB]$; $M \ldots (AB)$; $M \ldots [BE]$; $C \ldots (AB)$.

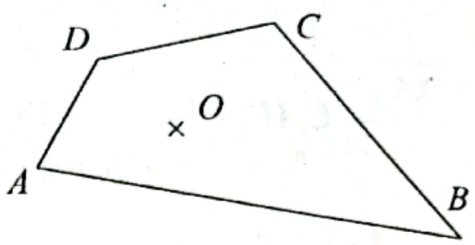
12. Considerăm punctele A, B, C, D, E distincte în plan, astfel încât oricare trei sunt coliniare. Demonstrați că toate punctele date sunt coliniare.

13. Pe o dreaptă CD se iau punctele A, M, N astfel încât $M \in [AC$, $N \in [AD$, $D \notin [AC$. Care propoziție este adevărată? a) $M \in [AN]$; b) $A \in [MN]$; c) $N \in [AM]$.

14. Pe dreapta AB fixăm punctele C și D (în ordinea A, C, D, B). Scrieți mai simplu mulțimea $[CB \cap [DA$.

Scanned with OKEN Scanner

15. Fie 4 puncte necoliniare A, B, C, D și O un alt punct ca în figura lăturată. a) Trasați semidreptele $[OA$, $[OB$, $[OC$, $[OD$; b) Puteți alege punctul O astfel încât semidreptele anterioare să fie conținute în trei drepte distincte ? c) Puteți alege punctul O astfel încât semidreptele precedente să determine două drepte distincte ?



16. Fie d și a două drepte, situate în același plan, care nu au nici un punct comun, și fie $A \in a$. Care dintre următoarele propoziții este adevărată: a) $A \in d$; b) $A \notin (d, A$; c) $a \subset (d, A$?

17. Desenați trei semiplane astfel încât să nu existe nici un punct comun tuturor și astfel încât oricum am alege două din aceste semiplane, să aibă puncte comune.

18. Fie d o dreaptă și A, $A' \in d$, două puncte arbitrare distincte ale ei. Să se arate că există două puncte B, $C \in d$, distincte, astfel încât $\{A, A'\} \subset [BC]$.

19. Fie d o dreaptă în plan, $A \in d$, $B \notin d$ și C un punct al semidreptei $(AB$. Arătați că:

$$[BC] \cap d = \varnothing.$$

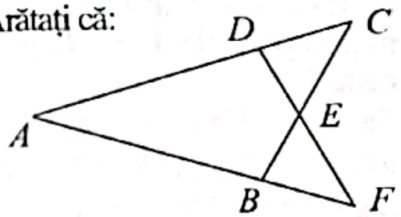
20. Fie o dreaptă d și trei puncte I, J, K care nu aparțin dreptei d și astfel încât: $[IJ] \cap d \neq \varnothing$, $[JK] \cap d \neq \varnothing$. Determinați $[KI] \cap d$.

21. Punctele diferite A_0, A_1, A_2, A_3 aparțin unei drepte d, iar punctul $M \notin d$. Scrieți toate segmentele închise determinate de punctele specificate.

22. Punctele A, B, C, D sunt coliniare și în această ordine. Arătați că:

$$AC + BD = AD + BC.$$

23. Câte segmente distincte sunt trasate în figura alăturată ?



24. Pe dreapta $X'X$ construiți două segmente $[AB]$ și $[CD]$ care nu au puncte comune, având lungimile de 3 cm. Arătați că segmentele $[AC]$ și $[BD]$ sunt congruente.

25. Pe o dreaptă $X'X$ construiți două segmente $[AB]$ și $[CD]$, astfel încât punctul C să fie situat între A și B. a) Care este segmentul "*intersecție*" a celor două segmente date ? b) Dacă cele două segmente $[AB]$ și $[CD]$ au aceeași lungime ce puteți afirma despre segmentele $[AC]$ și $[BD]$?

26. Fie A, B, C, D patru puncte distincte care aparțin dreptei d. Dacă $AC = AD + DC$ și $DB - CB = DC$, care este ordinea așezării pe dreapta d a acestor puncte ?

27. Fie o dreaptă $X'X$ și un punct O al acestei drepte. Fie $A \in X'X$, astfel încât $OA = 45$ mm, apoi construim segmentul $[AB]$ de lungime 57 mm, $B \in X'X$, O între A și B și segmentul $[BC]$ pe semidreapta $[BX$, astfel încât $BC = 29$ mm. Calculați lungimile segmentelor $[OB]$, $[OC]$ și $[AC]$. *Analizați toate cazurile* !

28. Pe o dreaptă dată d se găsesc patru puncte diferite A, B, C, D în această ordine. Dacă I este mijlocul segmentului $[AB]$ și J este mijlocul segmentului $[CD]$, stabiliți că:

$$IJ = \frac{AC + BD}{2}.$$

29. Fie un segment $[AB]$, O mijlocul său, iar M un punct pe prelungirea segmentului $[AB]$. Demonstrați că $2 \cdot OM = MA + MB$.

30. A și B sunt două puncte distincte, iar C un punct oarecare al dreptei AB, $C \notin [AB]$; I este mijlocul segmentului $[AC]$ și J este mijlocul segmentului $[CB]$. Dacă x este lungimea

Scanned with OKEN Scanner

segmentului $[AB]$, calculați în funcție de x lungimea segmentului $[IJ]$.

31. Pe segmentul $[AB]$ cu $AB = 6$ cm construiți două puncte C și D, astfel încât C să fie mijlocul segmentului $[AD]$ și D să fie mijlocul segmentului $[CB]$. Calculați lungimea segmentului $[CD]$.

32. Pe o dreaptă d se află punctele distincte A, B, C. Fie I mijlocul segmentului $[AB]$.

a) Dacă $A \in (CB)$ arătați că: $IA = \frac{CB - CA}{2}$ și $IC = \frac{CA + CB}{2}$.

b) Dacă $C \in (AI)$ arătați că: $IA = \frac{CB + CA}{2}$ și $IC = \frac{CB - CA}{2}$.

33. A și B sunt două puncte distincte date. Construiți punctele C, D și E astfel încât C să fie mijlocul segmentului $[AB]$, E să fie mijlocul segmentului $[CB]$ și D să fie mijlocul segmentului $[DE]$.

34. Fie semidreapta $(AX$ și B un punct al acesteia. Se consideră punctele C și D pe $(AX$, astfel încât $BC = 3 \cdot AB$ și $CD = 2 \cdot AB$. Dacă $AB = 1$ cm, calculați lungimile AC, AD, BC și BD.

35. Pe semidreapta $[OX$ se consideră punctele A și B. Notăm cu I mijlocul segmentului $[AB]$. Copiați și completați tabelul următor:

OA	6	1,5	3	8		12
OB	10	2,5	6,4		8,5	
OI				12	4,9	20

36. Pe axa numerelor fie punctele $A(5)$, $B(7)$. Care este coordonata mijlocului M al segmentului $[AB]$? În general stabiliți că dacă $A(a)$, $B(b)$ sunt puncte pe axă, $0 < a < b$ și M este mijlocul segmentului $[AB]$, atunci M are coordonata $\frac{a+b}{2}$.

37. Pe o dreaptă d se consideră punctele distincte A_0, A_1, A_2, ... A_{50}, astfel încât: $A_0A_1 = A_1A_2 = \ldots = A_{49}A_{50} = 1$ cm. a) Să se calculeze lungimea segmentului $[A_{18}A_{31}]$; b) Câte dintre segmentele determinate de punctele date au ca mijloc punctul A_{21} ? c) Care este mijlocul segmentului $[A_{11}A_{29}]$?

38. Fie segmentul $[AB]$ și M mijlocul său. Pe segmentul $[MB]$ fie un punct oarecare P, iar pe AB punctul Q, astfel ca $[QP] \equiv [PB]$. Demonstrați că $AQ = 2 \cdot MP$.

39. A_0 și A_1 sunt două puncte, astfel încât $A_0A_1 = 5$ cm. Se definește un șir de puncte după regula următoare: A_2 este mijlocul segmentului $[A_0A_1]$; A_3 este mijlocul segmentului $[A_0A_2]$; A_4 este mijlocul segmentului $[A_0A_3]$, etc. Deci fiecare punct este mijlocul segmentului de capete A_0 și ultimul punct fixat. Calculați lungimile segmentelor $[A_0A_2]$, $[A_0A_3]$, $[A_0A_4]$. Cât este lungimea segmentului $[A_0A_{12}]$? Puteți spune de ce număr se apropie lungimea segmentului $[A_0A_n]$ când n crește oricât de mult ?

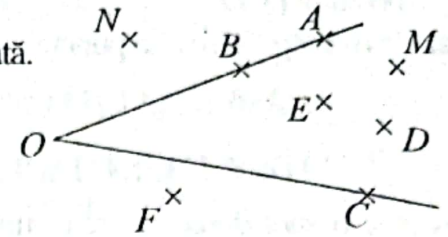
40. A_0 și A_1 sunt două puncte atfel încât $A_0A_1 = 3$ m. Se definește un șir de puncte după regula următoare: A_2 este mijlocul segmentului $[A_0A_1]$; A_3 este mijlocul segmentului $[A_2A_1]$, etc. Deci fiecare punct este mijlocul segmentului de catepe A_1 și ultimul punct fixat. Calculați distanțele: A_0A_2, A_0A_3, A_0A_4 și A_0A_{10}. Puteți spune de ce număr se apropie lungimea segmentului $[A_0A_n]$ când n crește oricât de mult ?

*

* *

Scanned with OKEN Scanner

CAP. VI. • UNGHIURI •



1. a) Citiți și scrieți în trei moduri unghiul din figura alăturată.
b) Care sunt punctele din interiorul unghiului $\sphericalangle AOB$?
c) Care sunt punctele din interiorul unghiului $\sphericalangle CON$?
d) Determinați: $AC \cap (\sphericalangle AOC)$; $(BC \cap (\sphericalangle AOC)$;
$MD \cap (\sphericalangle BOC)$.

2. Desenați unghiul $\sphericalangle ABC$ cu măsura de 70° și duceți (BA', semidreapta opusă lui (BA. Determinați $m(\sphericalangle ABA')$ și $m(\sphericalangle A'BC)$.

3. Se dă unghiul $\sphericalangle XOY$ și se duce (OY', semidreapta opusă lui (OY. Știind că $m(\sphericalangle XOY') = 3\,m(\sphericalangle XOY)$, calculați $m(\sphericalangle XOY)$ și $m(\sphericalangle XOY')$.

4. Fie $\sphericalangle AOB$ un unghi alungit și punctul C așa încât $m(\sphericalangle AOC)$ este cu 50° mai mare decât $m(\sphericalangle BOC)$. Calculați $m(\sphericalangle AOC)$ și $m(\sphericalangle BOC)$.

5. Fie unghiul alungit AOB și punctele M, N, P așa încât:
$$m(\sphericalangle AOM) = m(\sphericalangle MOP) = m(\sphericalangle POB).$$
Calculați: a) $m(\sphericalangle AOM)$; b) $m(\sphericalangle AOP)$; c) $m(\sphericalangle MOB)$.

6. Fie punctele A, B, C, D, O așa încât A, O, D sunt coliniare, iar B și C de aceeași parte a lui AD. Dacă $m(\sphericalangle AOB) = 20°$ și $m(\sphericalangle BOC) = 3\,m(\sphericalangle COD)$, calculați:
a) $m(\sphericalangle BOC)$; b) $m(\sphericalangle COA)$.

7. Se dă unghiul alungit $\sphericalangle XOY$ și punctele A, B de aceeași parte a dreptei XY, așa încât măsurile unghiurilor $\sphericalangle XOA$, $\sphericalangle AOB$ și $\sphericalangle BOY$ să fie direct proporționale cu numerele 2, 3, 5. Calculați măsurile celor trei unghiuri.

8. Fie punctele coliniare A, B, C, iar D și E două puncte de aceeași parte a dreptei AC. Dacă $m(\sphericalangle ABD) = m(\sphericalangle CBE) = \frac{1}{2}\,m(\sphericalangle DBE)$, calculați măsurile acestor unghiuri.

9. Construiți unghiurile $\sphericalangle AOB$ și $\sphericalangle AOC$, cu $m(\sphericalangle AOB) = 110°$ și $m(\sphericalangle AOC) = 70°$. Calculați $m(\sphericalangle BOC)$.

10. Fie unghiurile $\sphericalangle MNP$ și $\sphericalangle PNQ$ cu măsurile de 65° și 85°. Calculați $m(\sphericalangle MNQ)$.

11. Construiți unghiurile $\sphericalangle AOB$, $\sphericalangle BOC$, $\sphericalangle DOE$ știind că:
$$\sphericalangle AOB \equiv \sphericalangle BOC \equiv \sphericalangle COD \equiv \sphericalangle DOE \text{ și } m(\sphericalangle AOE) = 180°.$$

12. Care sunt măsurile unghiurilor formate de bisectoarea unui unghi de 75° cu laturile?

13. Bisectoarea unui unghi formează cu una din laturi un unghi de 26° 30' 30". Cât este măsura unghiului?

14. Se dă unghiul $\sphericalangle AOB$ și (OB' semidreapta pusă lui (OB. Știind că $m(\sphericalangle AOB) = 40°$ și (OC este bisectoarea unghiului $\sphericalangle AOB$, calculați $m(\sphericalangle COB')$.

15. Fie $\sphericalangle AOB$ și $\sphericalangle BOC$ două unghiuri adiacente suplementare cu măsurile respectiv 80° și 40°. Calculați: a) măsura unghiului dintre laturile necomune;
b) măsura unghiului dintre bisectoarele celor două unghiuri.

16. Fie $\sphericalangle XOY$ și $\sphericalangle YOZ$ două unghiuri adiacente cu măsurile de 65° și 135°. Calculați:
a) măsura unghiului dintre laturile necomune; b) măsura unghiului dintre bisectoarele lor.

17. Două unghiuri adiacente $\sphericalangle AOB$ și $\sphericalangle AOC$ au măsurile 120° și respectiv 100°. Care este măsura unghiului dintre (OC și bisectoarea unghiului $\sphericalangle BOA$.

18. Fie unghiurile neadiacente $\sphericalangle AOB$ și $\sphericalangle AOC$ de măsuri 50° și 70°. Calculați: a) măsura unghiului dintre laturile necomune; b) măsura unghiului dintre bisectoarele unghiurilor $\sphericalangle AOB$

Scanned with OKEN Scanner

și $\sphericalangle COB$.

19. Suma măsurilor a două unghiuri adiacente este de 280°. Calculați: a) măsura unghiurilor dintre laturile necomune ; b) măsura unghiului dintre bisectoare lor.

20. Măsura unghiului format de bisectoarele a două unghiuri adiacente de 70°. Calculați măsura unghiului dintre laturile necomune.

21. Măsura unghiului dintre laturile necomune a două unghiuri adiacente este 130°. Calculați măsura unghiului dintre bisectoarele lor.

22. Dacă unghiurile $\sphericalangle AOB$ și $\sphericalangle COD$ au aceeași bisectoare , arătați că: $\sphericalangle AOC \equiv \sphericalangle BOD$.

23. Fie unghiurile $\sphericalangle AOB$ și $\sphericalangle COD$, așa încât $\sphericalangle AOB$ este în interiorul unghiului $\sphericalangle COD$. Dacă $\sphericalangle BOC \equiv \sphericalangle AOD$, demonstrați că $\sphericalangle AOB$ și $\sphericalangle COD$ au aceeași bisectoare.

24. Se consideră unghiurile $\sphericalangle XOY$, $\sphericalangle AOB$ și $\sphericalangle COD$ așa încât (OX este bisectoarea unghiului $\sphericalangle AOB$ și (OY bisectoarea unghiului $\sphericalangle COD$. Dacă $m(\sphericalangle XOY) = 90°$, arătați că $\sphericalangle AOC$ și $\sphericalangle BOD$ sunt suplementare.

25. Fie unghiul $\sphericalangle AOB$, (OD bisectoarea lui și (OC o semidreaptă oarecare. Exprimați $m(\sphericalangle DOC)$ în funcție de $m(\sphericalangle AOC)$ și $m(\sphericalangle BOC)$.

26. Aflați măsura unghiului dintre bisectoarele a două unghiuri adiacente complementare.

27. Calculați măsura unui unghi , știind că este $\frac{2}{3}$ din măsura complementului său.

28. Diferența a două unghiuri complementare este 15°. Calculați măsura unghiurilor.

29. Măsura unui unghi este cu 50° mai mare decât măsura complementului său. Aflați măsura acestui unghi.

30. Raportul măsurilor a două unghiuri suplementare este 5. Calculați măsurile celor două unghiuri.

31. Măsura unui unghi este $\frac{4}{5}$ din măsura suplementului său. Aflați măsura acestui unghi.

32. Măsurile a două unghiuri suplementare sunt invers proporționale cu numerele 0,5 și 0,(3). Calculați măsurile celor două unghiuri.

33. Suplementul complementului unui unghi are 130°. Câte grade are unghiul respectiv.

34. Complementul suplementului unui unghi are 20°. Calculați măsura acestui unghi.

35. Se dau unghiurile adiacente $\sphericalangle AOB$ și $\sphericalangle BOC$. Știind că $\sphericalangle COD$ este adiacent cu $\sphericalangle BOC$, $m(\sphericalangle AOB) = 30°$, $m(\sphericalangle BOC) = 85°$, $m(\sphericalangle AOD) = 180°$, calculați $m(\sphericalangle COD)$.

36. Se dă unghiul $\sphericalangle AOB$ cu măsura 124°. Construiți semidreapta (OC așa încât bisectoarea unghiului $\sphericalangle BOC$ să fie opusă lui (OA.

37. Două unghiuri adiacente au laturile necomune în prelungire. Calculați măsurile celor două unghiuri , dacă $\frac{1}{7}$ din măsura primului unghi este jumătate din măsura celuilalt.

38. Dacă bisectoarele a două unghiuri adiacente formează un unghi de 60° și măsurile celor două unghiuri sunt invers proporționale cu numerele 0,5 și 0,25 , calculați măsurile acestor unghiuri.

39. Se dau unghiurile $\sphericalangle AOB$ și $\sphericalangle BOC$ așa încât $m(\sphericalangle AOB) = 3\, m(\sphericalangle BOC)$. Știind că bisectoarele lor formează un unghi de 54°, calculați: a) $m(\sphericalangle AOC)$; b) $m(\sphericalangle AOB)$; $m(\sphericalangle BOC)$; c) $m(\sphericalangle AOB')$, (OB' și (OB fiind semidrepte opuse.

40. Fie unghiurile adiacente $\sphericalangle AOB$ și $\sphericalangle AOC$, cu $\dfrac{m(\hat{AOB})}{m(\hat{AOC})} = \dfrac{2}{5}$, $m(\sphericalangle BOC) = 28°$. Calculați:

a) $m(\sphericalangle AOB)$ și $m(\sphericalangle AOC)$;

b) măsura unghiului dintre bisectoarele unghiurilor $\sphericalangle AOB$ și $\sphericalangle AOC$.

Scanned with OKEN Scanner

41. Se dă unghiul $\sphericalangle XOY$ și în același plan cu el se consideră unghiurile $\sphericalangle AOB$ și $\sphericalangle COD$, având ca bisectoare $(OX$, respectiv $(OY$. Știind că $(OA$ și $(OC$ sunt între $(OX$ și $(OY$ și $m(\sphericalangle XOY) = 50°$, calculați:

a) $m(\sphericalangle BOD) + m(\sphericalangle AOC)$, știind că $(OA$ este între $(OX$ și $(OC$;

b) $m(\sphericalangle BOD) - m(\sphericalangle AOC)$, știind că $(OC$ este între $(OX$ și $(OA$.

42. Fie $\sphericalangle AOC$ și $\sphericalangle COB$ unghiuri diacente suplementare. În interiorul unghiului $\sphericalangle AOC$ ducem $(OM$ și $(ON$ astfel ca $\sphericalangle AOM \equiv \sphericalangle MON \equiv \sphericalangle NOC$, iar în interiorul unghiului $\sphericalangle COB$ semidreptele $(OP$ și $(OQ$, astfel ca $\sphericalangle COP \equiv \sphericalangle POQ \equiv \sphericalangle QOB$. Calculați:

a) $m(\sphericalangle NOP)$; b) $m(\sphericalangle AOC)$, când $\sphericalangle AON \equiv \sphericalangle NOQ$.

43. Fie $\sphericalangle AOB$ și $\sphericalangle AOC$ neadiacente, așa încât $m(\sphericalangle BOC) = 2\,m(\sphericalangle AOC)$. Dacă $(OD$ este opusă lui $(OA$ și $m(\sphericalangle BOD) = 90°$, aflați măsurile unghiurilor $\sphericalangle AOB$, $\sphericalangle AOC$, $\sphericalangle BOC$ și ale unghiurilor dintre bisectoarele unghiurilor $\sphericalangle BOD$ și $\sphericalangle BOC$, respectiv $\sphericalangle AOB$ și $\sphericalangle AOC$.

44. Fie $\sphericalangle AOC$ și $\sphericalangle BOC$ unghiuri neadiacente, astfel încât $m(\sphericalangle AOB) = 90°$, $(OD$ semidreapta opusă lui $(OC$ și $m(\sphericalangle BOD) = m(\sphericalangle AOC)$. Aflați $m(\sphericalangle AOC)$ și $m(\sphericalangle BOC)$.

45. Fie $\sphericalangle XOY$, $\sphericalangle YOZ$, $\sphericalangle ZOT$ unghiuri adiacente două câte două în această ordine, așa încât: $m(\sphericalangle XOY) = 20°$, $m(\sphericalangle YOZ) = 30°$, $m(\sphericalangle ZOT) = 40°$ și $(OU$ bisectoarea unghiului $\sphericalangle XOT$. Determinați măsurile unghiurilor: $\sphericalangle XOU$, $\sphericalangle UOT$, $\sphericalangle UOZ$, $\sphericalangle YOU$.

46. Fiind date 5 unghiuri în jurul unui punct, care dintre acestea pot fi ascuțite ?

47. Având 6 unghiuri în jurul unui punct, câte dintre acestea pot fi obtuze ?

48. Fie $\sphericalangle AOB$, $\sphericalangle BOC$, $\sphericalangle COA$ trei unghiuri în jurul punctului O, așa încât $\sphericalangle AOC \equiv \sphericalangle BOC$. Arătați că semidreapta opusă lui $(OC$ este bisectoarea unghiului $\sphericalangle AOB$.

49. Fie $\sphericalangle AOB$, $\sphericalangle BOC$, $\sphericalangle COD$, $\sphericalangle DOA$ unghiuri în jurul lui O, cu proprietățile: $m(\sphericalangle BOC) = 2\,m(\sphericalangle AOB)$, $2\,m(\sphericalangle DOC) = 3\,m(\sphericalangle BOC)$ și $m(\sphericalangle DOA) = m(\sphericalangle AOB)$. Calculați măsurile celor patru unghiuri.

50. Știind că măsurile a 5 unghiuri în jurul unui punct sunt direct proporționale cu numerele 2, 3, 4, 5, 6, calculați aceste măsuri.

51. Știind că măsurile a trei unghiuri în jurul unui punct sunt invers proporționale cu numerele 0,25 ; 0,2 ; 0,1(6), calculați aceste măsuri.

52. Prin punctul O trec dreptele AA', BB' și CC'. Dacă $(OX$, $(OX'$, $(OY$, $(OY'$ sunt respectiv bisectoarele unghiurilor $\sphericalangle AOB$, $\sphericalangle A'OB'$, $\sphericalangle BOC$ și $\sphericalangle B'OC'$, calculați suma măsurilor unghiurilor: $\sphericalangle AOY'$, $\sphericalangle XOB$, $\sphericalangle YOC$, $\sphericalangle X'OA'$.

53. Fie $\sphericalangle AOB$, $\sphericalangle BOC$, $\sphericalangle COD$ adiacente două câte două, $m(\sphericalangle AOD) = 180°$, $(OE$ semidreapta opusă lui $(OC$, $(OM$ bisectoarea unghiului $\sphericalangle BOC$ și $(OP$ bisectoarea unghiului $\sphericalangle COD$. Știind că $m(\sphericalangle POM) = 80° = m(\sphericalangle BOE)$, să se afle măsurile unghiurilor: $\sphericalangle AOB$, $\sphericalangle AOE$, $\sphericalangle COD$, $\sphericalangle COB$, $\sphericalangle MOE$, $\sphericalangle EOP$.

54. Se consideră unghiurile $\sphericalangle AOB$, $\sphericalangle BOC$, $\sphericalangle COD$, $\sphericalangle DOE$, $\sphericalangle EOF$ și $\sphericalangle FOA$ în jurul punctului O. Știind că $(OC$ și $(OF$ sunt semidrepte opuse, $m(\sphericalangle AOE) = 180°$, $(OD$ este bisectoarea unghiului $\sphericalangle COE$, $m(\sphericalangle BOC) = 20°$ și $m(\sphericalangle EOF) = 50°$, aflați măsurile unghiurilor $\sphericalangle AOF$, $\sphericalangle AOB$, $\sphericalangle BOD$ și verificați dacă $OB \perp OD$.

55. Fie $\sphericalangle AOB$, $\sphericalangle BOC$, $\sphericalangle COA$, unghiuri în jurul punctului O, congruente. a) Aflați unghiurile formate de bisectoarele lor; b) Cum sunt $(OA$ și bisectoarea unghiului $\sphericalangle BOC$?

56. Fie AA' și BB' două drepte concurente în O. Dacă $m(\sphericalangle AOB) = 2\,m(\sphericalangle A'OB)$, să se calculeze: a) $m(\sphericalangle A'OB')$; b) $m(\sphericalangle AOB')$.

57. Două drepte se intersectează. Câte grade are fiecare unghi format, dacă:

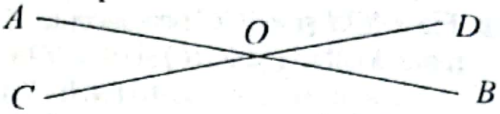
a) Suma a două dintre ele este 85°; b) Suma a trei dintre ele este 250°.

58. Câte grade are fiecare din măsurile celor 4 unghiuri formate de două drepte concurente dacă diferența a două dintre ele este 50° ?

Scanned with OKEN Scanner

59. Dacă semidreptele $(OA$, $(OB$, $(OC$, $(OD$ sunt duse în așa fel încât bisectoarele unghiurilor $\sphericalangle BOC$ și $\sphericalangle AOC$, să fie în prelungire și analog bisectoarele unghiurilor $\sphericalangle BOC$ și $\sphericalangle AOD$, atunci cele 4 semidrepte considerate, sunt două câte două opuse.

60. În figura alăturată se știe că A, O, B sunt coliniare și $\sphericalangle AOC \equiv \sphericalangle BOD$. Demonstrați că C, O, D sunt coliniare.



61. Să se determine măsurile unghiurilor formate de două drepte concurente, știind că raportul a două dintre ele este 3.

62. Se dau punctele oliniare E, O, C și B, O, D. Știind că $m(\sphericalangle AOE) = 45°$ și $m(\sphericalangle BOC) = 55°$, calculați: a) $m(\sphericalangle AOB)$; b) $m(\sphericalangle AOD)$; c) $m(\sphericalangle COD)$.

63. Fie AB și CD două drepte concurente în O. Știind că $2\,m(\sphericalangle AOC) = 3\,m(\sphericalangle COB)$, calculați $m(\sphericalangle BOD)$.

64. Se consideră dreptele AB și CD concurente în O. Dacă $m(\sphericalangle AOC) = 2\,m(\sphericalangle AOD)$, să se afle măsurile unghiurilor $\sphericalangle AOD$, $\sphericalangle BOC$, $\sphericalangle AOC$, $\sphericalangle COD$ și a celui format de bisectoarele unghiurilor $\sphericalangle AOD$ și $\sphericalangle AOC$.

65. Fie unghiul $\sphericalangle AOB$, $(OA' \perp (OA$, $(OA$ de aceeași parte cu $(OB$, $(OB' \perp (OB$, $(OB'$ nu este de aceeași parte cu $(OA$. Arătați că unghiurile $\sphericalangle AOB$ și $\sphericalangle A'OB'$ sunt congruente și bisectoarele lor sunt perpendiculare.

66. Se dau unghiurile drepte $\sphericalangle AOB$ și $\sphericalangle COD$, astfel ca $(OC$ să fie în interiorul unghiului $\sphericalangle AOB$ și $(OA$ în interiorul unghiului $\sphericalangle COD$. Fie $(OP$ bisectoarea unghiului $\sphericalangle AOC$. Arătați că $\sphericalangle AOC$ și $\sphericalangle BOD$ sunt suplementare și $(OP$ este bisectoarea unghiului $\sphericalangle BOD$.

67. Fie unghiul ascuțit $\sphericalangle XOY$. În semiplanul determinat de OX și în care nu se află $(OY$, se duc $OA \perp OX$ și $OB \perp OY$. Se notează $(OC$ bisectoarea unghiului $\sphericalangle BOX$. a) Dacă $m(\sphericalangle AOC)$ este cu 16° mai mare decât $m(\sphericalangle XOY)$, calculați $m(\sphericalangle XOY)$; b) Dacă $(OB$ este bisectoarea unghiului $\sphericalangle AOC$, atunci $(OX$ este bisectoarea unghiului $\sphericalangle COY$.

68. Se dă unghiul $\sphericalangle AOB$ mai mic decât un unghi drept. Prelungim $(OA$ cu semidreapta $(OE$. De aceeași parte cu $(OB$ se duc $(OC \perp (OA$ și $(OD \perp (OB$. Unghiul $\sphericalangle DOE$ este de trei ori mai mare decât unghiul $\sphericalangle AOB$. Să se calculeze măsurile unghiurilor $\sphericalangle DOE$ și $\sphericalangle EOF$, unde $(OF$ ese bisectoarea unghiului $\sphericalangle AOD$.

69. $\sphericalangle AOB$ și $\sphericalangle BOC$ sunt unghiuri adiacente suplementare, $m(\sphericalangle BOC) - m(\sphericalangle BOA) = 60°$.

a) Calculați măsurile celor două unghiuri;

b) Dacă D este un punct în interiorul unghiului $\sphericalangle BOC$ și $m(\sphericalangle DOC) = 30°$, stabiliți dacă bisectoarea unghiului $\sphericalangle BOD$ este perpendiculară pe AC.

70. Fie $(OA$, $(OB$, $(OC$, $(OD$ semidrepte în această ordine cu $m(\sphericalangle AOD) = 180°$ și $OB \perp OC$. Calculați: a) măsura unghiului dintre bisectoarele unghiurilor $\sphericalangle AOB$ și $\sphericalangle COD$;

b) măsura unghiului dintre bisectoarele unghiurilor $\sphericalangle AOC$ și $\sphericalangle BOD$.

71. Se dau unghiurile $\sphericalangle AOB$, $\sphericalangle BOC$ și $\sphericalangle COD$ adiacente două câte două și ale căror măsuri însumate fac 180°. Se știe că măsurile lor sunt invers proporționale cu numerele 0,(3), 0,5 și 0,25. Știind că $(OM$ este bisectoarea unghiului $\sphericalangle AOB$ și $(ON$ ese bisectoarea unghiului $\sphericalangle COD$, să se afle: a) $m(\sphericalangle AOB)$; $m(\sphericalangle BOC)$; $m(\sphericalangle COD)$; b) $m(\sphericalangle MON)$;

c) $m(\sphericalangle MOP)$, unde $OP \perp ON$.

72. Se consideră semidreptele $(OA$, $(OB$, $(OC$, $(OD$, $(OE$, $(OF$, în această ordine, astfel ca: $m(\sphericalangle AOB) = 30°$, $OC \perp OB$, $m(\sphericalangle AOD) = 180°$, $m(\sphericalangle DOE) = 2\,m(\sphericalangle AOF)$ și $m(\sphericalangle EOF) = 60°$. Calculați: $m(\sphericalangle COD)$, $m(\sphericalangle DOE)$, $m(\sphericalangle AOF)$.

73. Se dau unghiurile adiacente $\sphericalangle AOC$ și $\sphericalangle BOC$ cu laturile necomune semidrepte opuse. Fie $OD \perp OC$ (D și C de aceeași parte a lui AB). Știind că bisectoarea unghiului $\sphericalangle DOC$ este perpendiculară pe AB, calculați $m(\sphericalangle BOC)$.

Scanned with OKEN Scanner

74. $\sphericalangle AOB$, $\sphericalangle BOC$ sunt unghiuri adiacente suplementare și $m(\sphericalangle BOC) < m(\sphericalangle AOB)$. Dacă $OD \perp OC$ și $m(\sphericalangle DOB) = 30°$, calculați: a) $m(\sphericalangle BOC)$, $m(\sphericalangle AOB)$; b) măsura unghiului format de bisectoarele unghiurilor $\sphericalangle AOB$ și $\sphericalangle BOC$.

75. Fie $\sphericalangle AOB$ și $\sphericalangle AOC$ neadiacente și $OD \perp OA$. Știind că $m(\sphericalangle BOC)$ este de două ori mai mare decât $m(\sphericalangle AOB)$ și că $\sphericalangle AOB \equiv \sphericalangle DOC$, calculați:

$$m(\sphericalangle AOB),\ m(\sphericalangle BOC),\ m(\sphericalangle AOC).$$

76. Fie A, O, B puncte coliniare. De aceeași parte a dreptei AB se duce (OC astfel încât $m(\sphericalangle BOC) = 30°$, $OD \perp OC$ și $OE \perp AB$. Calculați:

a) $m(\sphericalangle COE)$, $m(\sphericalangle AOD)$, $m(\sphericalangle DOE)$, $m(\sphericalangle BOD)$;

b) măsura unghiului format de bisectoarele unghiurilor $\sphericalangle AOD$ și $\sphericalangle BOC$.

77. Se dă unghiul $\sphericalangle AOB$ de măsură 130°. Se duce semidreapta (OC opusă lui (OA și $OD \perp \perp OA$, astfel încât (OB și (OD să fie în semiplane diferite față de AC. În același semiplan cu (OD se duce $OE \perp OB$. Să se afle: a) $m(\sphericalangle BOC)$, $m(\sphericalangle COE)$, $m(\sphericalangle EOD)$; b) măsura unghiului format de bisectoarele unghiurilor $\sphericalangle AOB$ și $\sphericalangle COE$.

78. Se consideră semidreptele (OA, (OB, (OC, (OD, în această ordine, astfel încât $OA \perp \perp OB$, $m(\sphericalangle BOC) = 35°$ și $m(\sphericalangle AOD) = 135°$. Calulați: a) $m(\sphericalangle DOC)$; b) Ce puteți spune despre semidreapta (OD și bisectoarea unghiului $\sphericalangle AOB$?

79. Se dă unghiul $\sphericalangle AOB$ cu măsura 70° și în interiorul lui se duce semidreapta (OC, așa încât $m(\sphericalangle BOC) = 30°$. Fie ($OD \perp ($OA, ($OE opusă lui ($OC și ($OF opusă lui ($OB. Calculați măsurile unghiurilor: $\sphericalangle BOD$, $\sphericalangle AOF$, $\sphericalangle EOF$, $\sphericalangle EOD$.

80. Fie $\sphericalangle AOB$ și $\sphericalangle COD$ opuse la vârf astfel ca A, O, C să fie coliniare. Se duc ($OE \perp ($OB, ($OF \perp ($OA, astfel ca E, F, B să fie de aceeași parte a dreptei AC. Dacă $m(\sphericalangle AOB) = x$, exprimați în funcție de x, măsurile unghiurilor $\sphericalangle BOF$, $\sphericalangle EOF$, $\sphericalangle COE$, $\sphericalangle DOC$ și $\sphericalangle AOD$.

81. Fie ($OM \perp ($ON și de aceeași parte cu ($OM față de ON, se duce (OP, astfel ca $m(\sphericalangle NOP) = 100°$. Fie ($OE$ bisectoarea unghiului $\sphericalangle NOP$, (OF semidreapta opusă lui ($OE și $OA \perp OP$, (OA în exteriorul unghiului $\sphericalangle MON$. Aflați măsurile unghiurilor:

$$\sphericalangle EON,\ \sphericalangle EOP,\ \sphericalangle POM,\ \sphericalangle AOM,\ \sphericalangle AOF,\ \sphericalangle FON.$$

82. Fie A, O, B puncte coliniare. De aceeași parte a dreptei AB se duc semidreptele (OC și (OD perpendiculare, astfel încât $m(\sphericalangle BOD) = 2\,m(\sphericalangle AOC)$. a) Care e măsura unghiului format de bisectoarele unghiurilor $\sphericalangle AOC$ și $\sphericalangle BOD$; b) Dacă (OE este semidreapta opusă lui (OC, ce puteți spune despre bisectoarele unghiurilor $\sphericalangle AOC$ și $\sphericalangle BOE$?

83. Fie M, O, N puncte coliniare. De o parte și de alta a dreptei MN se duc semidreptele (OA și (OB perpendiculare, astfel încât $8\,m(\sphericalangle AON) = m(\sphericalangle AOM)$. Aflați măsurile unghiurilor: $\sphericalangle AOM$, $\sphericalangle AON$, $\sphericalangle BON$, $\sphericalangle MOB$.

*

* *

Scanned with OKEN Scanner

CAP. VII. • TRIUNGHIUL •

1. Dacă $\Delta ABC \equiv \Delta NPM$, $AC = 5$ și $m(\sphericalangle NMP) = 40°$ care este lungimea segmentului $[MN]$ și $m(\sphericalangle ACB)$?

2. Fie ΔABC și $\Delta A'B'C'$. Dacă $(BC) \equiv (A'C')$ și $m(\sphericalangle ABC) = m(\sphericalangle A'C'B')$, $\sphericalangle ACB \equiv \sphericalangle B'A'C'$, $AC = 11$ cm atunci $A'B' = 11$ cm?

3. Construiți un triunghi MAT cu $MA = 4$ cm, $AT = 42$ mm, $MT = 28$ mm și calculați perimetrul său.

4. Un triunghi ABC isoscel are o latură de 0,25 m și perimetru de 62 cm. Aflați celelalte laturi. Construiți triunghiul.

5. Un triunghi echilateral ABC, are semiperimetrul său de 24 cm. Aflați latura lui. Construiți-l.

6. Ce fel de triunghi este triunghiul ABC dacă $\Delta ABC \equiv \Delta BCA$?

7. Construiți un triunghi isoscel ABC cu baza AB dacă $AC = 6$ cm, $AB = 5$ cm.

8. Construiți un triunghi ABC isoscel de bază BC astfel ca $AC < \frac{BC}{2}$.

9. În triunghiul ABC isoscel $AB = AC = 10$ cm, AM este mediană și $BM = 5$ cm. Arătați că triunghiul ABC este echilateral.

10. Construiți un triunghi ABC dacă: a) $AC = 5$ cm, $BC = 7$ cm, $m(\sphericalangle C) = 140°$;
b) $AB = 7$ cm, $BC = 5$ cm, $AC = 3$ cm;
c) $AC = 4{,}5$ cm, $m(\sphericalangle A) = 40°$, $m(\sphericalangle C) = 105°$.

11. Fie I punctul de intersecție a bisectoarelor triunghiului echilateral ABC. Bisectoarea unghiului $\sphericalangle A$ intersectează pe $[BC]$ în punctul D, iar bisectoarea unghiului $\sphericalangle BIA$ intersectează pe $[AB]$ în E. Să se arate că triunghiurile BID, BIE, AIE sunt congruente.

12 Fie ABC un triunghi isoscel, $[AB] \equiv [AC]$. Pe latura $[AB]$ se ia un punct M, pe $[AC]$ un punct N, cu $[BM] \equiv [CN]$, $BN \cap CM = \{P\}$. Demonstrați că:
a) $[BN] \equiv [CM]$; b) $[PB] \equiv [PC]$; c) (AP este bisectoarea unghiului $\sphericalangle A$.

13. Pe dreapta d, se consideră punctele A, B, C, D (în această ordine), astfel încât $AB = BC = CD$. Fie E un punct exterior dreptei d astfel încât $\sphericalangle EAD \equiv \sphericalangle EDA$. În triunghiul EAD se construiesc medianele $[AF]$ ($F \in ED$) și $[DP]$ ($P \in AE$). Să se arate că:
a) $[AF] \equiv [DP]$; b) $\Delta APB \equiv \Delta DFC$.

14. Pe laturile unui triunghi echilateral se iau în același sens punctele M, N, P, așa încât $AM = BN = CP$. Să se arate că triunghiul MNP este echilateral.

15. Pe baza $[BC]$ a unui triunghi isoscel ABC se ridică perpendicularele BD și CE (de aceeași parte a lui BC) astfel încât $BD = CE$. Să se arate că triunghiul ADE este isoscel.

16. Se dă triunghiul ABC, cu unghiul $\sphericalangle A$ ascuțit. În punctul A se consideră $[AE$ perpendiculară pe dreapta AB, astfel încât $(AB) \equiv (AE)$, iar E și C sunt în semiplane opuse determinate de dreapta AB. În punctul A mai considerăm $[AG$ perpendiculară pe dreapta AC, astfel încât $(AC) \equiv (AG)$, iar G și B sunt în semiplane opuse determinate de dreapta AC. Demonstrați că: $(EC) \equiv (BG)$.

17. Construiți triunghiul ABC, cunoscând că mediana $[AD]$ este congruentă cu latura $[AB]$ a

Scanned with OKEN Scanner

triunghiului și știind că mediana $[AD]$ formează cu înălțimea $[AE]$ un unghi de măsură $30°$. Ce fel de triunghi obținem ?

18. Triunghiul ABC are $m(\sphericalangle A) = 90°$, $AC = 4$, $AB = 3$. Dacă prelungim latura $[CA]$ cu $AM = 3$ și latura $[AB]$ cu $BN = 1$, comparați $[MN]$ cu $[BC]$.

19. În triunghiul isoscel ABC ($[AB] \equiv [AC]$), se duc perpendicularele în B pe AB și în C pe AC și se iau pe ele segmentele $[BD] \equiv [CE]$ așa încât punctele A, D, E sunt de aceeași parte a dreptei BC. Să se arate că triunghiul ADE este isoscel.

20. Se dă triunghiul isoscel ABC cu $(AB) \equiv (AC)$. Pe latura $[BC]$ se consideră punctele M și N, așa încât $(BM) \equiv (CN)$, iar pe laturile $[AB]$ și $[AC]$ punctele S și respectiv T, astfel ca $(AS) \equiv (AT)$. Dacă $\{Q\} = MT \cap NS$, arătați că: a) $(MT) \equiv (NS)$; b) triunghiul MQN este isoscel ; c) $(AQ$ este bisectoarea unghiului $\sphericalangle A$.

21. Demonstrați că două triunghiuri ABC și $A'B'C'$ care au perimetrele egale, iar $[CA] \equiv [C'A']$, $\sphericalangle C \equiv \sphericalangle C'$, sunt congruente.

22. Fie triunghiul ABC, isoscel, $(AB) \equiv (CA)$, M un punct pe latura $[AB]$ și N un punct pe latura $[AC]$. Dacă $AM - MB = AN - NC$, atunci $(BN) \equiv (CM)$.

23. Pe laturile unui triunghi ABC, având $m(\sphericalangle A) = 90°$, $m(\sphericalangle B) = 60°$, $m(\sphericalangle C) = 30°$, se construiesc în exterior triunghiurile echilaterale ABP, BCM, CAN. a) Să se stabilească dacă punctele M, B, P sunt coliniare; b) Să se arate că: $MC \perp AC$, $NC \perp BC$; c) Arătați că $(AM) \equiv (BN) \equiv (CP)$.

24. Se dă triunghiul ABC, isoscel ($(AB) \equiv (CA)$) și (BB'), (CC') medianele laturilor $[AC]$, respectiv $[AB]$. Dacă $\{G\} = BB' \cap CC'$, să se demonstreze că: a) $[BB'] \equiv [CC']$ și $\sphericalangle ABB' \equiv \sphericalangle ACC'$; b) $\sphericalangle GBC \equiv \sphericalangle GCB$; c) $(AG$ este bisectoarea unghiului $\sphericalangle A$.

25. În triunghiul ABC înălțimea $[AD]$ este congruentă cu latura $[BC]$. Înălțimile din C și B intersectează perpendicularele în B și C pe BC în E și respectiv F. Să se afle măsura unghiului $\sphericalangle EDF$.

26. Prin punctul O se duc trei drepte oarecare, pe care se iau respectiv segmentele de lungime $OA = OD$, $OB = OE$ și $OC = OF$, $O \in (BE)$, $O \in (CF)$, $O \in (AD)$. Să se arate că

$$\Delta ABC \equiv \Delta DEF.$$

27. În vârful A al triunghiului ABC cu $(AB) \equiv (AC)$, se duc perpendicularele pe AB și AC (de o parte și de alta a înălțimii din A), pe care se iau segmentele $(AD) \equiv (AE)$. a) Să se demonstreze că $(BE) \equiv (CD)$; b) Notând $BE \cap CD = \{Q\}$, demonstrați că $[AQ$ este bisectoarea unghiului $\sphericalangle BAC$.

28. Fie triunghiul ABC oarecare, iar M mijlocul laturii $[BC]$. a) Determinați un punct $P \in [AB] \cup [AC]$, astfel încât $\Delta PBM \equiv \Delta PCM$; b) Presupunem că există un punct P, astfel încât $\Delta BPM \equiv \Delta CPM \equiv \Delta BPA$, $P \in (AC)$ și $m(\sphericalangle A) = 90°$. Determinați măsurile unghiurilor triunghiului ABC și demonstrați că $BP \perp AM$.

29. Fie triunghiurile ABC și $A'B'C'$ cu $[AB] \equiv [A'B']$, $[BC] \equiv [B'C']$, $[BM] \equiv [B'M']$, unde M și M' sunt respectiv mijloacele segmentelor $[AC]$, $[A'C']$. Demonstrați că

$$\Delta ABC \equiv \Delta A'B'C'.$$

30. Fie M un punct în interiorul triunghiului ABC ($AB = AC$), astfel încât $\sphericalangle MBA \equiv \sphericalangle MCA$. Să se arate că M este situat pe bisectoarea unghiului $\sphericalangle BAC$.

31. Pe laturile unui unghi $\sphericalangle XOY$ se iau $OA = OB$, apoi pe aceleași laturi se iau $OA' = OB'$. Dacă

Scanned with OKEN Scanner

$A'B \cap AB' = \{M\}$, să se arate că $[OM$ este bisectoarea unghiului dat.

32. Fie un triunghi isoscel ABC cu $[AB] \equiv [AC]$ și $AD \perp BC$ $(D \in (BC))$. Dacă $\sphericalangle ADP \equiv \sphericalangle ADR$, unde $P \in (AB)$ și $R \in (AC)$, atunci $AD \perp PR$.

33. Se dă triunghiul ABC isoscel cu $(AB) \equiv (AC)$. Pe laturile $[AB]$ și $[AC]$ se construiesc în exterior triunghiurile echilaterale ABD și ACE. Fie $\{M\} = BD \cap CE$ și $\{N\} = CD \cap BE$. a) Să se arate că: $\Delta EBM \equiv \Delta DCM$; b) Arătați că A, M, N și mijloacele lui $[BC]$ și $[DE]$ sunt coliniare; c) Să se determine măsura unghiului $\sphericalangle BAC$, astfel încât punctele D, A, E să fie coliniare.

34. În triunghiul isoscel ABC ($[AB] \equiv [AC]$), fie punctele D și E care aparțin laturii $[BC]$, astfel ca $BD = DE = EC$. Dacă M și P sunt respectiv mijloacele laturilor $[AB]$ și $[AC]$, să se demonstreze că: a) $MD = PE$; b) $\sphericalangle MDA \equiv \sphericalangle PEA$.

35. Se dă triunghiul obtuzunghic isoscel ABC ($AB = AC$). Mediatoarea laturii $[AC]$ taie pe BC în D, iar mediatoarea laturii $[AB]$ taie pe BC în E. a) Să se compare $[AD]$ cu $[AE]$; b) Dacă $m(\sphericalangle BAC) = 120°$ ce relații puteți stabili între segmentele $[BE]$, $[ED]$, $[DC]$? c) Dacă $BE = ED = CD$ aflați $m(\sphericalangle BAC)$.

36. Fie triunghiul ABC cu $(AB) \equiv (AC)$. Pe latura $[BC]$ se iau punctele M și N, astfel încât $(BM) \equiv (CN)$. Să se demonstreze că punctele M și N sunt simetrice față de bisectoarea unghiului $\sphericalangle BAC$.

37. În triunghiul ABC, $m(\sphericalangle A) = 90°$, $m(\sphericalangle B) = 30°$, fie I centrul cercului înscris și O centrul cercului circumscris triunghiului ABC. Să se demonstreze că $IO = IA$.

38. Fie trei triunghiuri echilaterale și anume ABC, ABM, ACN. Se prelungesc laturile $[MB]$ și $[NC]$ până se intersectează în punctul P. a) Să se arate că punctele M, A, N sunt coliniare; b) Dacă perimetrul triunghiului ABC este 12 cm, să se afle perimetrul triunghiului MNP.

39. Să se arate că într-un triunghi ABC latura $[AC]$, bisectoarea unghiului $\sphericalangle B$ și mediatoarea laturii $[BC]$ sunt concurente, dacă și nun ai dacă $m(\sphericalangle B) = 2\,m(\sphericalangle C)$.

40. Pe laturile congruente ale triunghiului isoscel ABC $(AB = AC)$ se iau punctele $M, P \in [AB]$ și $N, Q \in [AC]$, astfel încât $AM = MP = PB$ și $AN = NQ = QC$. Notând $\{I\} = MQ \cap NP$, $MQ \cap BC = \{R\}$ și $NP \cap BC = \{S\}$, să se arate că: a) triunghiul SIR este isoscel ; b) $AI \perp PQ$; c) bisectoarea unghiulu $\sphericalangle SAR$ coincide cu bisectoarea unghiului $\sphericalangle BAC$.

41. Se dă triunghiul isoscel ABC cu $AB = AC$ și $AB > BC$. Pe latura $[AC]$ se consideră punctul M astfel încât $\sphericalangle BMC \equiv \sphericalangle ABC$. Se duc $MN \perp BM$, $N \in BC$ și $PC \perp BC$, $P \in BM$, $MN \cap CP = \{Q\}$. Să se arate că: a) $[MP] \equiv [CN]$; b) $BQ \perp MC$.

42. În triunghiul isoscel ABC ($AB = AC$), fie $E \in (BC)$, astfel ca $3\,CE = 2\,BC$. Perpendiculara în E pe BC intersectează (AB) în F, iar paralela prin E la AB intersectează (AC) în D. Să se demonstreze că $AF = AD$.

43. Fie AB o dreaptă și X, Y două puncte de o parte și de alta a dreptei. Demonstrați că dacă $d(X, AB) = d(Y, AB)$, atunci M este mijlocul segmentului (XY), unde $\{M\} = (AB) \cap (XY)$.

44. Fie ABC un triunghi ascuțitunghic cu $m(\sphericalangle A) = 60°$, iar B' și C' picioarele înălțimilor din B și C. Notăm cu M mijlocul laturii $[BC]$. Să se arate că triunghiul $MB'C'$ este echilateral.

45. Fie triunghiul isoscel ABC ($AB = AC$), $D \in (BC)$ și $m(\sphericalangle CAD) = 20°$. Știind că $AE =$

Scanned with OKEN Scanner

$= AD$, $E \in (AB)$, calculați $m(\sphericalangle BDE)$.

46. Fie ABC un triunghi isoscel, $(AB) \equiv (AC)$ și $m(\sphericalangle A) = 20°$. Fie $F \in (AC)$, astfel încât $m(\sphericalangle FBC) = 20°$ și $E \in (AB)$ astfel încât $m(\sphericalangle BCE) = 50°$. Să se arate că triunghiul BEF este echilateral.

47. Fie ABC un triunghi isoscel, $AB = AC$ și $D \in (AC)$. Se prelungește (AB) cu $[BE] \equiv [CD]$. Dacă $\{F\} = BC \cap DE$, arătați că F este mijlocul segmentului $[DE]$.

48. În interiorul unui triunghi echilateral de latură 2 se consideră 5 puncte oarecare. Să se arate că există cel puțin două puncte la o distanță cel mult egală cu 1.

49. Într-un triunghi neechilateral ascuțitunghic, printr-un vârf este dusă înălțimea, prin altul mediana, iar prin cel de-al treilea bisectoarea. Arătați că aceste drepte nu pot forma prin intersecție un triunghi echilateral.

50. Fie triunghiul isoscel ABC $(AB = AC)$, cu $m(\sphericalangle A) > 90°$. În vârful A se duc $AD \perp AC$ $(D \in BC)$ și $AE \perp AB$ $(E \in BC)$. În triunghiul AEC se duce înălțimea din E și în triunghiul ADB se duce înălțimea din D. Se prelungesc aceste înălțimi până se întâlnesc într-un punct H. Să se arate că: a) $[AD] \equiv [AE]$; b) $AH \perp BC$; c) $HC \perp AE$; $HB \perp AD$.

51. În triunghiul ABC, $m(\sphericalangle C) = 40°$, $AD \perp BC$ $(D \in BC)$, $I \in AD$ astfel ca $\sphericalangle ACI \equiv \sphericalangle ICB$ și $IC \cap AB = \{E\}$. a) Aflați $m(\sphericalangle AIE)$; b) Aflați măsurile unghiurilor triunghiului ABC dacă $m(\sphericalangle AEI) = 80°$.

52. Fie P un punct în interiorul unui unghi $\sphericalangle XOY$ având măsura de 30°, iar A, B proiecțiile lui P pe laturile unghiului. Notăm cu Q mijlocul segmentului $[OP]$. Să se arate că triunghiul QAB este echilateral.

53. Fie unghiul $\sphericalangle AOB$ având măsura de 120°, iar P un punct pe bisectoarea unghiului $\sphericalangle AOB$ astfel încât $OP = OA + OB$. Să se arate că triunghiul PAB este echilateral.

54. Fie triunghiul ABC în care $[AB] \equiv [AC]$. Se consideră B', $E \in AC$ și C', $D \in AB$ astfel înât $[BB']$ și $[CC']$ sunt mediane, $A \in (EC)$ și $A \in (DB)$, iar $[AE] \equiv [AD]$. Să se arate că: a) $[BB'] \equiv [CC']$; b) Dacă $BB' \cap CC' = \{G\}$, atunci $AG \perp B'C'$; c) G, A, I sunt coliniare (I este intersecția bisectoarelor unghiurilor $\sphericalangle AED$ și $\sphericalangle ADE$.

55. Se dă triunghiul ABC dreptunghic în A. Pe semidreapta $(AC$ se ia punctul D astfel încât unghiurile $\sphericalangle ABD$ și $\sphericalangle ABC$ să fie complementare. Știind că $E \in (BC)$ să se demonstreze că dacă $[AE]$ este înălțime în triunghiul ABC, atunci $[AM]$ este mediană în triunghiul ABD, unde $\{M\} = AE \cap BD$.

56. Se dă triunghiul isoscel MNP cu baza $[NP]$ și fie Q mijlocul laturii $[MP]$. Prin P se duce paralela la dreapta NQ care intersectează dreapta MN în R, $N \in (MR)$. Demonstrați că N este mijlocul segmentului $[MR]$.

57. În triunghiul oarecare ABC, bisectoarea interioară a unghiului $\sphericalangle B$ intersectează dreapta ce trece prin mijloacele laturilor $[AB]$ și $[AC]$ în P. a) Dacă $AP \cap BC = \{Q\}$, să se demonstreze că triunghiul ABQ este isoscel; b) Fie D mijlocul laturii $[AB]$ și $E \in (CD$, astfel încât $\sphericalangle BCA \equiv \sphericalangle BEA$. Să se arate că triunghiurile ABC și BAE sunt congruente.

58. Fie ABC un triunghi în interiorul căruia există un punct M, astfel încât $\sphericalangle AMB \equiv \sphericalangle BMC \equiv \sphericalangle CMA$ și $[MA_1] \equiv [MB_1] \equiv [MC_1]$, unde $\{A_1\} = AM \cap BC$, $\{B_1\} = BM \cap AC$ și $\{C_1\} = CM \cap AB$. Arătați că triunghiul ABC este echilateral.

59. Fie ABC un triunghi isoscel cu $m(\sphericalangle BAC) = 100°$. Fie $(CE (E \in AB)$ bisectoarea unghiu-

Scanned with OKEN Scanner

lui $\sphericalangle ACB$, ($AD (D \in BC)$ bisectoarea unghiului $\sphericalangle BAC$ și F intersecția lui CE cu AD. Bisectoarea unghiului $\sphericalangle BEC$ intersectează latura $[BC]$ în G. Să se arate că (GF este bisectoarea unghiului $\sphericalangle EGD$.

60. Fie N mijlocul medianei $[AM]$ a triunghiului ABC ($M \in (BC)$), iar $\{P\} = CN \cap AB$. Dacă $\Delta ANC \equiv \Delta MNC$, arătați că: a) $BC = 2AC$; b) $[PA] \equiv [PM]$.

61. Fie triunghiul ABC cu $AB = 8$, $AC = 10$, $BC = 12$. Pe latura $[BC]$ se iau punctele M și N, astfel încât: $2BM = NC$ și $5BN = 4MC$. a) Să se afle lungimile segmentelor $[BM]$, $[MN]$ și $[NC]$; b) E și F fiind mijloacele segmentelor $[AM]$, respectiv $[AN]$, să se arate că: $\sphericalangle ABF \equiv \sphericalangle CBF$ și $\sphericalangle ACE \equiv \sphericalangle BCE$; c) Perpendiculara în N pe AN intersectează dreapta AB în P. Să se arate că B este mijlocul segmentului $[AP]$.

62. Fie ABC un triunghi isoscel ($(AB) \equiv (AC)$)) și $AD \perp BC$, $D \in (BC)$. Dacă $\sphericalangle ADP \equiv \equiv \sphericalangle ADR$, unde $P \in (AB)$ și $R \in (AC)$, atunci AD și PR sunt perpendiculare.

63. Se consideră triunghiul ABC isoscel cu $(AB) \equiv (AC)$, M și N mijloacele laturilor $[AB]$, respectiv $[AC]$, iar D, $E \in [BC]$, astfel ca $(BD) \equiv (DE) \equiv (EC)$. Să se arate că:

a) $(ME) \equiv (DN)$; b) $AP \perp BC$, unde $\{P\} = ME \cap ND$.

64. Se consideră triunghiul ABC ascuțitunghic și M un punct interior laturii $[BC]$. Perpendiculara în M pe BC întâlnește latura $[AC]$ în P, iar perpendiculara din M pe latura $[AB]$ întâlnește această latură în Q. Să se arate că triunghiul ABC este isoscel ($AB = AC$), dacă și numai dacă $m(\sphericalangle PMQ) = 90° - \dfrac{m(\hat{BAC})}{2}$.

65. Pe latura $[BC]$ a triunghiului isoscel ABC ($AB = AC$), se iau punctele interioare M și N, astfel încât: $\dfrac{BM}{MC} = \dfrac{CN}{NB} = k$. Arătați că: a) $AM = AN$; b) $\dfrac{MN}{BC} = \dfrac{1-k}{1+k}$.

66. În triunghiul ABC cu $m(\sphericalangle A) = 90°$, fie punctele B' și C' așa încât $\{A\} = [BB'] \cap \cap [CC']$ și $AB = AC'$, $AC = AB'$. a) Arătați că: $\Delta ABC \equiv \Delta AC'B'$; b) Înălțimea AH a triunghiului ABC taie $B'C'$ în M. Arătați că $[AM]$ este mediană în triunghiul $AB'C'$.

67. Fie triunghiul ABC și (AD bisectoarea unghiului $\sphericalangle BAC$, $D \in (BC)$. Arătați că dacă $AB + DC = AC + BD$, atunci triunghiul ABC este isoscel.

68. În triunghiul ABC, $m(\sphericalangle C) = m(\sphericalangle B) = 36°$. Mediatoarea segmentului (AC) taie (AB) în D. Să se arate că triunghiul BCD este isoscel.

69. În triunghiul ABC cu $m(\sphericalangle A) = 90°$, construim înălțimea $[AD]$, $D \in (BC)$ și bisectoarea $[AE]$, $E \in (DC)$, a unghiului $\sphericalangle DAC$. Arătați că triunghiul ABE este isoscel.

70. În triunghiul isoscel ABC fie M mijlocul bazei $[BC]$ și $E \in (MA$, astfel încât $[ME] \equiv [MB]$ și $D \in (MB$, astfel încât $[MD] \equiv [MA]$. Demonstrați că $DE \perp AC$.

*

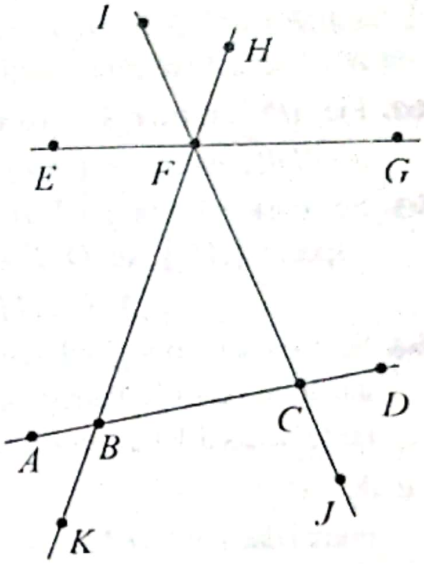
* *

Scanned with OKEN Scanner

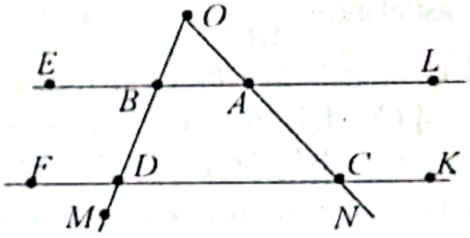
CAP. VIII. • DREPTE PARALELE •

1. Fie d_1 și d_2 două drepte paralele. a) Considerăm trei puncte situate pe dreapta d_1 și patru puncte pe dreapta d_2. Unind cele 7 puncte câte două în toate modurile posibile, câte drepte distincte obținem ? b) Aceeași întrebare, în cazul în care considerăm m puncte pe dreapta d_1 și n puncte pe dreapta d_2.

2. În figura alăturată punctele A, B, C, D sunt coliniare, punctele E, F, G sunt coliniare, punctele K, B, F, H sunt coliniare și punctele I, F, C, J sunt coliniare. Completați propozițiile de mai jos: a) Unghiurile $\sphericalangle ABK$ și ... sunt unghiuri corespondente formate de dreptele AD și EG tăiate de secanta KH. b) Unghiurile $\sphericalangle ACI$ și ... sunt unghiuri alterne interne formate de dreptele AD și EG tăiate de secanta IJ. c) Unghiurile $\sphericalangle IFG$ și ... sunt unghiuri alterne externe formate de dreptele EG și AD tăiate de secanta ... . d) Unghiurile $\sphericalangle KBD$ și ... sunt unghiuri externe de aceeași parte a secantei formate de dreptele AD și EG tăiate de secanta KH. e) Unghiurile $\sphericalangle ABF$ și ... sunt unghiuri interne de aceeași parte a secantei formate de dreptele ... și ... tăiate de secanta ... . f) Unghiurile $\sphericalangle EFH$ și $\sphericalangle KBC$ sunt unghiuri ... formate de ... .

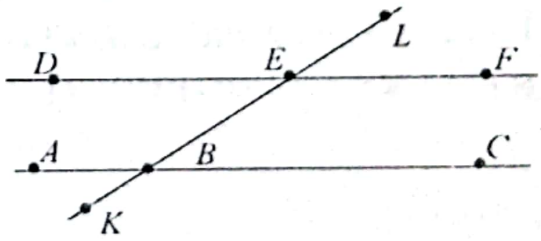


3. În figura alăturată, punctele E, B, A, L sunt coliniare, punctele F, D, C, K sunt coliniare, punctele O, B, D, M sunt coliniare și O, A, C, N sunt coliniare. Cunoscând că $\sphericalangle OAL \equiv \sphericalangle OCK$, indicați: a) trei unghiuri congruente cu unghiul $\sphericalangle OAB$; b) patru unghiuri suplementare unghiului $\sphericalangle OAB$.

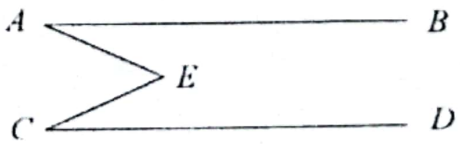


4. Considerăm figura din problema precedentă. Cunoaștem: $m(\sphericalangle OBE) = 100°10'$, $m(\sphericalangle BDC) = 79°50'$, $m(\sphericalangle DCN) = 123°15'$. a) Demonstrați că $EL \parallel FK$. b) Calculați măsurile unghiurilor $\sphericalangle OAB$ și $\sphericalangle NCK$. c) Ducem prin punctul C o paralelă la OM care intersectează EL în punctul S. Aflați măsurile unghiurilor $\sphericalangle SCK$, $\sphericalangle SCA$ și $\sphericalangle BOA$.

5. În figura alăturată cunoaștem că punctele A, B, C sunt coliniare, punctele D, E, F sunt coliniare și punctele K, B, E, L sunt coliniare. Știind că $AC \parallel DE$, iar $2\,m(\sphericalangle DEL) = 3\,m(\sphericalangle EBC)$, calculați măsurile unghiurilor $\sphericalangle ABK$ și $\sphericalangle CBK$.

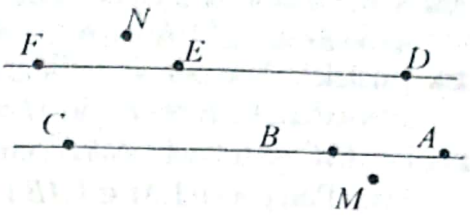


6. În figura alăturată cunoaștem că $AB \parallel CD$. Demonstrați că $m(\sphericalangle AEC) = m(\sphericalangle BAE) + m(\sphericalangle ECD)$.



Scanned with OKEN Scanner

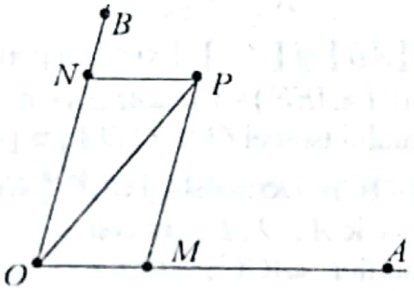
7. În figura alăturată cunoaștem că punctele A, B, C sunt coliniare, punctele M, B, E, N sunt coliniare, $m(\sphericalangle ABM) = 75°$, $m(\sphericalangle BEF) = 105°$, iar $m(\sphericalangle DEN) - m(\sphericalangle DEB) = 30°$. Demonstrați că punctele D, E, F sunt coliniare.



8. Fie d_1 și d_2 două drepte paralele, A și C situate pe d_1, B și D situate pe d_2 așa încât $[AD$ să fie bisectoarea unghiului $\sphericalangle BAC$. Știind că $m(\sphericalangle ADB) = 56°30' 25''$, aflați măsura fiecăruia dintre cele 8 unghiuri formate de d_1 și d_2 cu secanta AB.

9. În interiorul unghiului $\sphericalangle XOY$ având măsura de 79° se consideră un punct Z, așa încât $m(\sphericalangle XOZ) = 15° + m(\sphericalangle YOZ)$. Dacă M este un punct situat pe semidreapta $(OX$, așa încât $m(\sphericalangle MZO) = 32°$, demonstrați că $MZ \| OY$.

10. În figura următoare cunoaștem că $M \in (OA)$ și $N \in (OB)$. Știind că $m(\sphericalangle NPM) = m(\sphericalangle AOB) = 75°$, $m(\sphericalangle POB) = 2\,m(\sphericalangle POA)$ și $m(\sphericalangle OPM) - m(\sphericalangle OPN) = 25°$, demonstrați că: $\sphericalangle AMP \equiv \sphericalangle BNP$.



11. Fie ABC un triunghi și $[AD$ bisectoarea unghiului $\sphericalangle BAC$, $D \in (BC)$. Construim dreptele $DE \| AB$, $FE \| AD$, așa încât $E \in (AC)$ și $F \in (BC)$. Demonstrați că:

a) $[AE] \equiv [DE]$; b) $\sphericalangle DEF \equiv \sphericalangle CEF$.

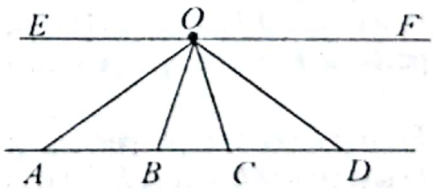
12. În triunghiul ABC isoscel ($[AB] \equiv [AC]$), prin punctul O din interiorul său sunt construite $MN \| BC$, $PQ \| AC$, ($Q, S \in (BC)$; $P, N \in (AC)$; $R, M \in (AB)$). Arătați că triunghiul RMO este isoscel și găsiți încă 5 triunghiuri isoscele.

13. În triunghiul ABC notăm cu I intersecția bisectoarelor unghiurilor $\sphericalangle BAC$ și $\sphericalangle ABC$. Paralela dusă prin I la AB intersectează AC și BC în D și E. Dacă $AB = 10$ cm, iar perimetrul triunghiului ABC este 22 cm, aflați perimetrul triunghiului CDE.

14. În figura alăturată A, B, C, D sunt coliniare, E, O, F sunt coliniare, $EF \| AD$ și $\sphericalangle EOA \equiv \sphericalangle AOB \equiv \sphericalangle BOC \equiv \sphericalangle COD \equiv \sphericalangle DOF$. Demonstrați că:

$[AB] \equiv [BO] \equiv [OC] \equiv [CD]$ și

$[AO] \equiv [OD] \equiv [AC] \equiv [BD]$.



15. Două drepte paralele sunt tăiate de o secantă, așa încât suma măsurilor oricăror două dintre cele 8 unghiuri formate este aceeași. Ce rezultă ?

16. Suma măsurilor a trei dintre cele 8 unghiuri formate de două drepte paralele tăiate de o secantă este egală cu $135°41' 45''$. Aflați măsura fiecărui unghi.

17. Printre cele 8 unghiuri formate de două drepte paralele tăiate de o secantă există două complementare. Aflați măsurile celor 8 unghiuri.

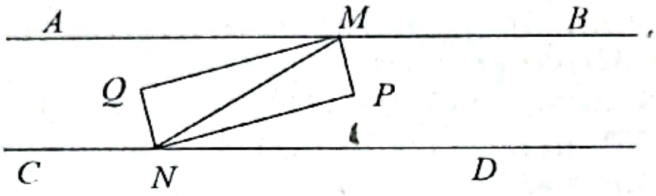
Scanned with OKEN Scanner

18. Suma măsurilor a cinci dintre cele 8 unghiuri formate de două drepte paralele tăiate de o secantă este 525°. Aflați măsura fiecăruia dintre cele 8 unghiuri. *Discuție!*

19. Paralelele duse prin vârful A al triunghiului ABC la bisectoarele unghiurilor $\sphericalangle ACB$ și $\sphericalangle ABC$ intersectează dreapta BC în M și N. Demonstrați că: $MN = AB + BC + CA$.

20. Fie ABC un triunghi având perimetrul 102 cm, $AB = 35$ cm, iar AC mai mare decât BC cu 3 cm. Prin punctul $M \in (AB)$ ducem o paralelă la BC care intersectează AC în N. Demonstrați că triunghiul AMN este isoscel.

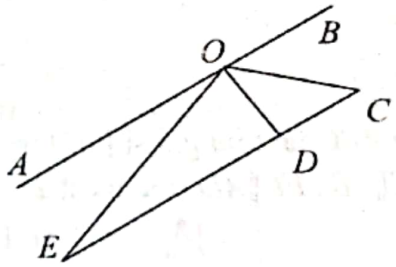
21. În figura următoare avem: $AB \parallel CD$, $M \in (AB)$, $N \in (CD)$, $[MP$ bisectoarea unghiului $\sphericalangle BMD$, iar $[NP$ bisectoarea unghiului $\sphericalangle MND$. Cunoscând că $m(\sphericalangle PMQ) = m(\sphericalangle PNQ) = 90°$, arătați că: a) $MP \parallel NQ$ și $NP \parallel MQ$; b) $[MQ$ este bisectoarea unghiului $\sphericalangle AMN$.



22. Se dau două segmente $[AB]$ și $[AC]$. Există un punct $E \in (AB)$ și un punct $F \in (AC)$, așa încât $m(\sphericalangle BEF) - m(\sphericalangle AEF) = m(\sphericalangle AFE) - m(\sphericalangle CFE)$?

23. Prin vârful O al triunghiului isoscel OAB ($[OA] \equiv [OB]$) ducem o dreaptă XY, așa încât $O \in (XY)$ și $\sphericalangle XOA \equiv \sphericalangle YOB$. Demonstrați că $XY \parallel AB$.

24. În figura alăturată, punctele A, O, B sunt coliniare, măsurile unghiurilor $\sphericalangle AOC$, $\sphericalangle COD$, $\sphericalangle DOE$ și $\sphericalangle EOB$ sunt invers proporționale cu numerele 4, 1, 2, 2, iar $[OC] \equiv [CD]$, $[OD] \equiv [ED]$. Demonstrați că E, D, C sunt coliniare.



25. Fie punctele M și N pe latura (BC) a triunghiului ABC, așa încât $\sphericalangle BAM \equiv \sphericalangle MAN \equiv \sphericalangle NAC$. Paralela dusă prin M la AN intersectează AB în E, iar paralela dusă prin N la AM taie AC în F. Cunoscând că $[EM] \equiv [NF]$, arătați că: $[AB] \equiv [AC]$.

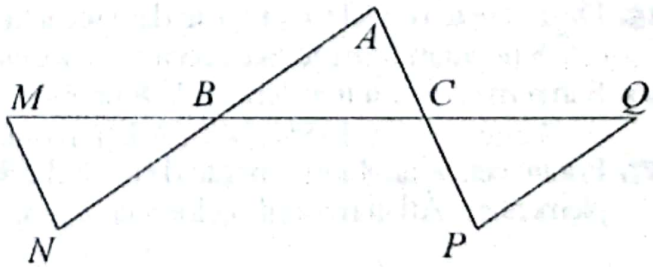
26. Fie punctul M în interiorul triunghiului ABC, $AD \perp BC$, $ME \perp AB$, $MF \perp AC$, E este mijlocul segmentului $[MN]$, iar F este mijlocul segmentului $[MP]$. Demonstrați că $NP \parallel BC$, dacă și numai dacă $\sphericalangle BAM \equiv \sphericalangle DAC$.

27. Prin mijlocul M al laturii $[BC]$ a triunghiului ABC ducem o dreaptă paralelă cu AB care taie pe AC în P și o dreaptă paralelă cu AC care taie pe AB în N. Demonstrați că:

$$\Delta NBM \equiv \Delta PMC.$$

28. Fie a și b două drepte paralele și O un punct egal depărtat de a și b. O secantă care trece prin O taie pe a și b în A și B, iar o altă secantă care trece prin O taie pe a și b în C și D. Demonstrați că $\Delta AOC \equiv \Delta BOD$.

29. În figura alăturată cunoaștem: $AB = BN$, $MB = BC = CQ$ și $AC = CP$. Demonstrați că: a) $\Delta MBN \equiv \Delta CQP$;
b) $MN \parallel AC$ și $PQ \parallel AB$.

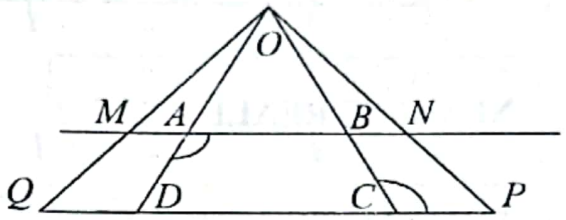


Scanned with OKEN Scanner

30. Fie ABC un triunghi isoscel ($AB = AC$), O mijlocul laturii $[BC]$, iar M și N două puncte situate respectiv pe AB și AC astfel încât $MN \parallel BC$. Demonstrați că:

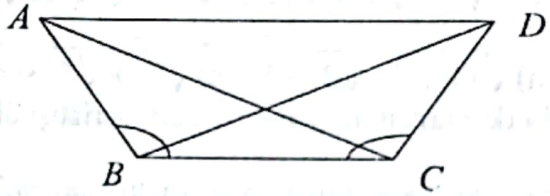
a) triunghiul OMN este isoscel; b) (OA este bisectoarea unghiului $\sphericalangle MON$.

31. În figura următoare cunoaștem $AB \parallel CD$, $\sphericalangle BAD \equiv \sphericalangle BCP$ și $AM = BN$. Demonstrați că: $\Delta ODQ \equiv \Delta OCP$.

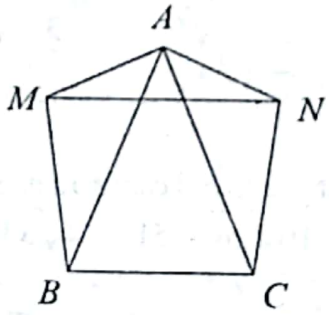


32. În figura următoare cunoaștem: $AB = CD$ și $\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle BCD$. Demonstrați că:

a) $\Delta ABC \equiv \Delta DCB$; b) $\Delta ABD \equiv \Delta DCA$; c) $BC \parallel AD$.



33. În figura următoare avem: $AB = AC$, $AM = AN$ și $MB = NC$. Demonstrați că: $MN \parallel BC$.



*

* *

clasa a VII-a

CAP. I. • NUMERE REALE •

1. Care dintre următoarele numere sunt raționale și care sunt iraționale: $-5, \frac{\sqrt{5}}{2}, \sqrt{3}$;

$\sqrt{12}, \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{12}}, -\frac{2}{\sqrt{2}}, \frac{1}{5}, 1+\sqrt{5}, \sqrt{3}+\sqrt{12}, 3\sqrt{5}-\sqrt{45}, 5\sqrt{3}-5.$

2. Demonstrați că numerele: a) $\sqrt{11}$; b) $\sqrt{3}-5$; c) $\sqrt{7}+\sqrt{5}$ sunt iraționale.

3. Dați exemple de trei perechi de numere iraționale a căror sumă și al căror produs sunt numere raționale.

4. Încadrați între două numere întregi consecutive fiecare dintre numerele:

a) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; b) $-\frac{1}{2}+\sqrt{2}$; c) $5-\frac{1}{\sqrt{5}}$; d) $\frac{1}{3-\sqrt{5}}$; e) $\frac{10}{\sqrt{7}+2}$.

5. Fie $x=\left(5-2\sqrt{6}\right)^2; y=\left(5+2\sqrt{6}\right)^2$. Care dintre numerele $x+y; x-y; x\cdot y, \frac{x}{y}$ sunt raționale?

6. Care dintre numerele următoare sunt pozitive și care sunt negative:

$3\sqrt{11}-10$; $5\sqrt{13}-18$; $10\sqrt{26}-51$; $4\sqrt{33}-23$; $8\sqrt{15}-31$?

7. Comparați numerele:

a) $\sqrt{11}$ și $\sqrt{3}+\sqrt{2}$; b) $\sqrt{6}-1$ și $\sqrt{2}$; c) $\sqrt{5}-1$ și $\sqrt{6-2\sqrt{5}}$.

8. Verificați egalitățile: a) $\left(\sqrt{2}-1\right)^2=\sqrt{9}-\sqrt{8}$;

b) $\left(\sqrt{2}-1\right)^4=\sqrt{289}-\sqrt{288}$; c) $\left(\sqrt{2}-1\right)^3=\sqrt{50}-\sqrt{49}$.

9. Efectuați: $\frac{\left(3^{-1}-\sqrt{1\frac{7}{9}}\right)^{-2}:0,25}{\frac{37}{300}:0,0925}+12,5\cdot 0,64.$

10. Comparați numerele:

$a=\sqrt{50}+5\sqrt{18}-10\sqrt{2}-10$ și $b=\left(1-\sqrt{2}\right)\left(5\sqrt{2}+3\right)+\sqrt{128}-3.$

11. Calculați: a) $\sqrt{\left(\sqrt{3}-\sqrt{5}\right)^2}+\sqrt{\left(1-\sqrt{3}\right)^2}-\sqrt{5}$;

b) $\sqrt{\left(\sqrt{3}-2\right)^2}-\sqrt{\left(1-\sqrt{3}\right)^2}+\sqrt{3}$.

Scanned with OKEN Scanner

12. Efectuați: $\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)$.

13. Demonstrați egalitățile:

a) $\sqrt{a+\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}+\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}$;

b) $\sqrt{a-\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}-\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}$, unde $a, b\geq 0$ și $a^2\geq b$.

14. Arătați că: $\sqrt{10+2\sqrt{21}}+\sqrt{16+2\sqrt{55}}=\sqrt{14+2\sqrt{33}}+\sqrt{12+2\sqrt{35}}=$
$=\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{7}+\sqrt{11}$.

15. a) Calculați $\left(2-\sqrt{3}\right)^2-8+4\sqrt{3}+1$

b) Dacă $x=2-\sqrt{3}$, calculați $\left(x^2-4x\right)^{1996}$.

16. Să se determine cel mai mic număr natural x cu proprietatea: $\frac{1}{x}<\frac{2-\sqrt{3}}{2}$.

17. Știind că $a<b<-1$, să se calculeze

$$\sqrt{(a-b)^2}+\sqrt{\left(a^2-b^2\right)^2}-\sqrt{a^2}+\sqrt{b^2}-\sqrt{\left(a^2-1\right)^2}+\sqrt{\left(b^2-1\right)^2}.$$

18. a) Știind că $-2\leq x\leq 2$ calculați: $\sqrt{(x+2)^2}+\sqrt{(x-2)^2}$.

b) Dacă $-1\leq x\leq 1$, calculați:

$$\sqrt{x^2-4x+4}+\sqrt{x^2-2x+1}+\sqrt{x^2+2x+1}+\sqrt{x^2+4x+4}.$$

19. Raționalizați: a) $\frac{2}{3\sqrt{2}}$; b) $\frac{7}{2\sqrt{5}}$; c) $\frac{5}{\sqrt{3}-2}$;

d) $\frac{-2\sqrt{2}}{\sqrt{7}+5}$; e) $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$; f) $\frac{-8}{\sqrt{11}+\sqrt{19}}$; g) $\frac{11}{2\sqrt{5}-5\sqrt{3}}$.

20. Demonstrați egalitatea: $\frac{13}{\sqrt{19+8\sqrt{3}}}+\frac{6}{\sqrt{12-6\sqrt{3}}}=7$.

21. Arătați că: $\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}}+\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1}}\in\mathbf{N}$.

22. Fie $a, b\in\mathbf{Q}_+^*$, $a\neq b$. Arătați că: $\frac{a\sqrt{b}-b\sqrt{a}}{a\sqrt{b}+b\sqrt{a}}+\frac{a\sqrt{b}+b\sqrt{a}}{a\sqrt{b}-b\sqrt{a}}\in\mathbf{Q}$.

23. Determinați mulțimea: $A=\left\{x\in\mathbf{Z}\,|\,(5x+4)\cdot\left|9-\sqrt{83}\right|=9-\sqrt{83}\right\}$.

Scanned with OKEN Scanner

24. Stabiliți dacă $N=\dfrac{\sqrt{3+\sqrt{5}}-\sqrt{3-\sqrt{5}}}{\sqrt{2}}$ este natural, rațional sau irațional.

25. Fie $x=\sqrt{4+\sqrt{15}}+\sqrt{4-\sqrt{15}}$ și $y=2\sqrt{3-\sqrt{5}}$. Calculați: x^2, y^2, x^2-y^2.

26. Calculați: $\left(\dfrac{10}{2-\sqrt{3}}\right)^{1994}\cdot\left(\dfrac{7-4\sqrt{3}}{25}\right)^{1995}\cdot\left(\dfrac{5}{4-2\sqrt{3}}\right)^{1996}$.

27. Efectuați: $\left(\dfrac{2}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}+\dfrac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}\right)^{-2}:\left(1+\dfrac{\sqrt{7}}{\sqrt{2}}\right)^{-2}$.

28. Pentru ce valori $x\in\mathbf{R}$, avem: $\sqrt{\left(5x-\sqrt{26}\right)^2}=\sqrt{26}-5x$?

29. Dacă $P=\sqrt{4+\sqrt{3}}-\sqrt{4-\sqrt{3}}$, arătați că: $0<P<1$.

30. Calculați:

$$\left(5+2\sqrt{6}\right)^{1996}\cdot\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)^{2\cdot1996}\cdot\left(9-4\sqrt{5}\right)^{-1996}\cdot\left(2+\sqrt{5}\right)^{-2\cdot1996}$$

31. Dacă $m=\sqrt{5+\sqrt{24}}-\sqrt{5-\sqrt{24}}-\sqrt{8}$, calculați m^{1997}.

32. Calculați: $\dfrac{3}{\sqrt{2}}+\dfrac{\sqrt{9}}{\sqrt{32}}+\dfrac{\sqrt{49}}{\sqrt{8}}-\dfrac{\sqrt{25}}{\sqrt{2}}$.

33. a) Arătați că numerele: $11-6\sqrt{2}$ și $51-14\sqrt{2}$ sunt pătratele unor numere iraționale care se cer determinate.

b) Determinați numerele naturale n știind că: $11-6\sqrt{2}<n^2<51-14\sqrt{2}$.

34. Aflați ce valori poate lua expresia:

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}(-1)^n-\frac{1}{\sqrt{6}}(-1)^{n+1}+\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\cdot(-1)^{2n+1},\ \text{unde } n\in\mathbf{N}.$$

35. Fie $E(x)=x^4-2x^3-x^2-2\cdot x+1$. Să se calculeze media aritmetică și media geometrică a numerelor $E\left(-\sqrt{2}\right)$ și $E\left(\sqrt{2}\right)$.

36. Fie $x=\sqrt{5-2\sqrt{6}}$ și $y=\sqrt{5+2\sqrt{6}}$. Calculați media aritmetică, geometrică și armonică a numerelor x și y.

37. Dacă a, b sunt numere strict pozitive și $x=\dfrac{1}{2}\left(a^2+b^2\right)$, iar $y=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}\right)$, calculați media geometrică a numerelor x și y.

38. Fie $a, b, c>0$ astfel încât $a=\dfrac{b+c}{2}$ și $c=\sqrt{ab}$. Arătați că: $b=\dfrac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{c}}$.

39. Aflați valorile lui $n\in\mathbf{N}$, astfel încât: $\sqrt{100-4\sqrt{n}}\in\mathbf{N}$.

Scanned with OKEN Scanner

40. Pentru ce valori întregi ale lui x, numărul $\frac{\sqrt{5400}}{\sqrt{x^3}}$ este natural ?

41. Determinați valorile întregi ale lui n, pentru care $\sqrt{n^2-3} \in \mathbf{Q}$.

42. Arătați că: $\sqrt{x^2-2x+1}+\sqrt{y^2-4y+4}+\sqrt{z^2-6z+9}=0 \Leftrightarrow x=1, y=2, z=3$.

43. Calculați: $\left(\frac{7}{\sqrt{11}-2}+\frac{5}{4+\sqrt{11}}\right)^{-2} : \left(\sqrt{1\frac{1}{3}}-\sqrt{16\frac{1}{3}}\right)^{-2}$.

44. Demonstrați inegalitatea: $\sqrt{2+\sqrt{3}} > \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{3}}}$.

45. Demonstrați inegalitățile: a) $\sqrt{2}+\sqrt{6}+\sqrt{12}+\sqrt{20} < \sqrt{12}$;

b) $\frac{\sqrt{2}}{3}+\frac{\sqrt{6}}{5}+\frac{\sqrt{12}}{7} < \frac{3}{2}$;

c) $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{10}} > \sqrt{10}$;

d) $\frac{\sqrt{1\cdot 2}}{3}+\frac{\sqrt{2\cdot 3}}{5}+\frac{\sqrt{3\cdot 4}}{7}+\ldots+\frac{\sqrt{100\cdot 101}}{201} < 50$.

46. Care este cel mai mic număr întreg mai mare decât $\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^4$?

47. Determinați $x \in \mathbf{Z}$ astfel încât $E(x)=\frac{\sqrt{9-4\sqrt{5}}+\sqrt{14-6\sqrt{5}}+x}{x-1}$ să fie număr întreg.

48. Care dintre numerele $\frac{3+\sqrt{5}}{6}$ și $\frac{3-\sqrt{5}}{6}$ este soluție a ecuației $\sqrt{1-x}-\sqrt{x}=\frac{1}{\sqrt{3}}$?

49. Arătați că: $\sqrt{11-6\sqrt{2}}+\sqrt{7-4\sqrt{3}}+\sqrt{5+2\sqrt{6}} \in \mathbf{N}$.

50. Comparați: a) $1995\sqrt{1996}$ și $1996\sqrt{1995}$; b) $\sqrt{1994}+\sqrt{1996}$ și $2\sqrt{1995}$.

*

* *

Scanned with OKEN Scanner

CAP. II. • ECUAȚII ȘI SISTEME DE ECUAȚII •

§ 1. • Ecuația de gradul I cu o necunoscută și cu două necunoscute • • Ecuații reductibile la ecuații de gradul I cu o necunoscută •

1. Stabiliți care dintre enunțurile de mai jos, sunt ecuații de gradul I cu o necunoscută :

a) $2 + x = 3,\ x \in \mathbf{N}$;

b) $x^2 - 1 = 0,\ x \in \mathbf{Z}$;

c) $x - y - 7 = 0,\ x \in \mathbf{R}$;

d) $\sqrt{2}\,x - 1 = 0,\ x \in \mathbf{R} - \mathbf{Q}$;

e) $|x|^2 = 2,\ x \in \mathbf{R}$;

f) $\frac{3x}{x} = 3,\ x \in \mathbf{R}$.

2. Verificați dacă numărul scris în dreptul fiecărei ecuații este soluție pentru ecuația respectivă:

a) $2(x+1) = 3(x-1)$, $x = 5$;

b) $\sqrt{3}\,x - 3 = 0$, $x = 3$;

c) $8\frac{1}{3}x = 5 + \frac{x}{2}$, $x = 0$;

d) $\frac{x+1}{6} - \frac{x+2}{2} = \frac{1}{4}$, $x = \frac{13}{4}$;

e) $\frac{3x+2}{x+1} = \frac{1}{2}$, $x = 1$;

f) $\frac{5x}{5x-3} = \frac{3}{3-5x}$, $x = \frac{3}{5}$.

3. Aflați $m \in \mathbf{R}$ pentru care:

a) 1 ; b) $\frac{1}{2}$; c) $-\frac{1}{3}$; d) 0,2 ; e) 0,1(3) ; f) $\sqrt{3}$; g) $\sqrt{2} - 1$; h) $\sqrt{3} - \sqrt{2}$; i) 2^{-2}

este soluție a ecuației în x: $mx - 3m = -2$.

4. Să se rezolve în $\mathbf{R}$ ecuațiile:

a) $5x - 3 = 2x - 1$;

b) $\sqrt{2}\,x - 1 = x + \sqrt{2}$;

c) $2 - \frac{x}{2} = \frac{3-x}{2} + 4$;

d) $\frac{2-x}{3} = \frac{x-2}{-3}$;

e) $\frac{2}{3x} + \frac{1}{5x} - \frac{13}{15x} = 0$;

f) $\frac{5x-7}{2} - \frac{2x+7}{3} = 3x - 14$;

g) $\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1} = \frac{4}{x^2-1}$;

h) $\frac{x+3}{x^2+4x+4} + \frac{2x+1}{x+2} = 2$;

i) $\frac{1}{x^2+2x+1} + \frac{1}{x^3+2x^2+x} = \frac{5}{2x^2+2x}$.

5. Rezolvați în $\mathbf{R}$ ecuațiile:

a) $1225 : \left[\frac{(13x-30)\cdot 4}{12} - 10\right] = 7$;

b) $\left\{\left[\frac{(120+x)\cdot 40}{2} + 200\right] : 131\right\} : 20 = 1$;

c) $3\left\{x - \frac{3x-1}{4} - \left[-2\left(x - \frac{3+x}{5}\right)\right]\right\} = 5x - 2$;

d) $\dfrac{\frac{x}{x-2} - \frac{x-1}{x-3}}{\frac{2x-1}{x-3} + \frac{3-4x}{2x-4}} = 1$;

Scanned with OKEN Scanner

e) $\dfrac{\dfrac{1}{x^2-6x+9}-\dfrac{2}{x^2-9}+\dfrac{1}{x^2+6x+9}}{\dfrac{2x}{x^2-9}-\left(\dfrac{1}{2x+6}+\dfrac{1}{9-3x}\right)\cdot\dfrac{2}{x-15}}=-\dfrac{9}{x^2-9}$;

f) $\dfrac{2(2-3x)}{0,01}-2,5=\dfrac{0,02-2x}{0,02}-7,5$;

g) $\dfrac{\sqrt{\frac{867}{75}}-\left(-\frac{3}{5}\right)}{x}=\dfrac{\sqrt{841}\cdot 12}{\sqrt{2523}\cdot\sqrt{3}}$;

h) $\dfrac{3\sqrt{722}\cdot\sqrt{2}}{38\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{598}}{x}$;

i) $\dfrac{\sqrt{2}x+1}{\sqrt{2}x-1}=\dfrac{3\sqrt{2}+2}{3\sqrt{2}-2}$.

6. Pentru ce valori ale parametrului real m ecuațiile sunt echivalente:

a) $2x+1=7$ și $mx-m=1$;

b) $mx-x=2$ și $-1+2x=x$;

c) $(m-1)x=m+1$ și $x^2+3x+3=(x-2)(x+2)$;

d) $1=m(x-1)$ și $2m(x-2)=3$;

e) $-2x+2=m(x+1)$ și $2m+mx=mx+2x$;

f) $\left(x-\sqrt{2}\right)m=mx+x\sqrt{3}+x\sqrt{3}$ și $\sqrt{2}x=-2+\sqrt{3}$.

7. Rezolvați în **R** ecuațiile, $m\in\mathbf{R}$:

a) $mx+2=m$; b) $\dfrac{mx}{x-1}=2$; c) $\dfrac{x+1}{m-2}-x=0$; d) $\dfrac{mx-1}{2-x}=m$;

e) $m^2x+x-2=m$; f) $\dfrac{1+x}{1-x}=m$; g) $\dfrac{x+m}{x-m}+\dfrac{1+m}{1-m}=2$; h) $\dfrac{-2+mx}{x-2}=4$;

i) $\overline{0,(x)}+\overline{0,m(x)}+\overline{0,x(m)}=\dfrac{m\cdot x}{9}$.

8. Dacă a și b sunt parametrii reali, rezolvați în **R** ecuațiile:

a) $\dfrac{x-1}{x+1}=\dfrac{a}{b}$; b) $\dfrac{a}{x-a}=\dfrac{b}{x-b}$; c) $\dfrac{x-a}{x+a}+\dfrac{b-a}{b+a}=2$;

d) $\dfrac{2+x}{2-x}=\dfrac{a}{b}$; e) $\dfrac{a+b}{x-a}=\dfrac{a-b}{x+a}$; f) $\dfrac{2x-a}{6x-b}=\dfrac{x-a}{3x-b}$;

g) $\dfrac{a}{1-x}+\dfrac{1}{a-x}=\dfrac{a+1}{b-x}$; h) $\dfrac{a}{x+b}+\dfrac{b}{x+a}=\dfrac{a+b}{x-1}$; i) $\dfrac{a+b}{x}+\dfrac{a+b}{b}=0$.

9. Rezolvați următoarele ecuații:

a) $|x-4|=4$; b) $|x+5|=6+x$;

c) $|x+1|+|x-2|=5$; d) $|x-2|+|x-1|=x+2$;

e) $|x-|x+2||=2$; f) $|x+1|=m$, $m\in\mathbf{R}$;

Scanned with OKEN Scanner

g) $|2x-7|-1=m,\ m\in\mathbf{R}$; h) $|x+1|=|x+2|-m,\ m\in\mathbf{R}$.

10. Să se rezolve ecuațiile: a) $x^2-y^2=3(x+y+14),\ x,y\in\mathbf{N}$;

b) $6xy-4x-3y=2,\ x,y\in\mathbf{Z}$; c) $2x^2\left(x^2-1\right)+2y(y-3)+5=0,\ x,y\in\mathbf{R}$;

d) $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{2},\ x,y\in\mathbf{Z}$; e) $x^2y-7x^2=441,\ x,y\in\mathbf{N}$;

f) $(\overline{xy})^2-(\overline{yx})^2=11(x+y)^3$; g) $x^3-y^3-2x^2y+2xy^2=91,\ x,y\in\mathbf{N}$;

h) $xy=x+y+2$; i) $x^2+5y^2-4xy-10y+25=0,\ x,y\in\mathbf{R}$.

*

§ 2. • Sisteme de ecuații •

I. Rezolvați sistemele de ecuații prin metoda reducerii:

1. $\begin{cases} x+y=7 \\ x-y=3 \end{cases}$. **2.** $\begin{cases} 3x+2y=7 \\ 2x-y=0 \end{cases}$.

3. $\begin{cases} \sqrt{3}x-\sqrt{2}y=1 \\ \sqrt{6}x+y=4\sqrt{2} \end{cases}$. **4.** $\begin{cases} 2,(6)x+1,(3)y=4 \\ 0,1(6)x+0,8(3)y=1 \end{cases}$.

5. $\begin{cases} 3x-y=2 \\ 1,5x+0,5y=0,25 \end{cases}$. **6.** $\begin{cases} \frac{2x-1}{1-2y}=5 \\ \frac{x+2}{y+2}=0 \end{cases}$.

7. $\begin{cases} 2(x+1)=3(y-1)+14 \\ 4x-3(2x+y-1)=2(-x+y)+8 \end{cases}$. **8.** $\begin{cases} 4(0,1x+1)+5=1,1y \\ \frac{11+0,3y-x}{5}=4\left(\frac{1}{5}-1\right) \end{cases}$.

9. $\begin{cases} 2x+y+2=0 \\ \frac{(x-3)^2}{2}=10+\frac{(1-x)^2}{2}-y \end{cases}$. **10.** $\begin{cases} \sqrt{3}x-\frac{5}{\sqrt{2}}y=0 \\ x+\sqrt{0,(6)}y=7\sqrt{2} \end{cases}$.

II. Rezolvați sistemele de ecuații prin metoda substituției:

1. $\begin{cases} 8x+2y=1 \\ 5x+3y=4 \end{cases}$. **2.** $\begin{cases} 7x+10y+5=0 \\ x+2y=1 \end{cases}$.

3. $\begin{cases} x+y=\sqrt{3} \\ x-y=2\sqrt{2} \end{cases}$. **4.** $\begin{cases} \frac{5x+7y}{3x+11}=\frac{13}{7} \\ \frac{11x+27}{7x+5y}=\frac{19}{11} \end{cases}$.

Scanned with OKEN Scanner

5. $\begin{cases} \frac{13}{x+2y+3} = -\frac{3}{4x-5y+6} \\ \frac{3}{6x-5y+4} = \frac{19}{3x+2y+1} \end{cases}$

6. $\begin{cases} 2(2x+3y) = 3(2x-3y)+10 \\ 4x-3y = 4(6y-2x)+3 \end{cases}$

7. $\begin{cases} \frac{x}{2} - \frac{y}{2} = 5 \\ \frac{3x}{2} - \frac{3y}{2} = 15 \end{cases}$

8. $\begin{cases} x+y = 3 \\ y = \frac{7-2x}{2} \end{cases}$

9. $\begin{cases} 2x + \frac{y-2}{5} = 21 \\ 4y + \frac{x-4}{6} = 29 \end{cases}$

10. $\begin{cases} \frac{x+2}{7} + \frac{y-x}{4} = 2x-8 \\ \frac{2y-3x}{3} + 2y = 3x+4 \end{cases}$

III. Rezolvați prin metoda grafică următoarele sisteme:

1. $\begin{cases} 2x-2y = 0 \\ 2x+3y = -5 \end{cases}$

2. $\begin{cases} x+y = 1 \\ x-y = 1 \end{cases}$

3. $\begin{cases} x+y = 2 \\ 2x-y = 1 \end{cases}$

4. $\begin{cases} x+y = 5 \\ x-y = -1 \end{cases}$

5. $\begin{cases} 2x-y = 0 \\ x+2y = 5 \end{cases}$

6. $\begin{cases} 3x+2y = 4 \\ 5x+6y = 4 \end{cases}$

7. $\begin{cases} x-2y = 3 \\ 2x-4y = 2 \end{cases}$

8. $\begin{cases} x+y = 2 \\ 2x+2y = 4 \end{cases}$

9. $\begin{cases} 3x-2y = 1 \\ 2x+3y = -8 \end{cases}$

10. $\begin{cases} \frac{x-y}{4} - x = -1\frac{1}{2} \\ y - \frac{y+x}{5} = 2\frac{1}{5} \end{cases}$

IV. Să se rezolve și să se discute sistemele (a, b parametrii reali):

1. $\begin{cases} (a+2)x+5y = 1 \\ x+(a-2)y = -1 \end{cases}$

2. $\begin{cases} ax+(a+1)y = 2 \\ (a+1)x+4y = 3 \end{cases}$

3. $\begin{cases} ax+(a+1)y = 2 \\ (a+2)x+(a+3)y = 1 \end{cases}$

4. $\begin{cases} (a+1)x+(a+2)y = a+3 \\ x+y = 2 \end{cases}$

5. $\begin{cases} \frac{x}{a+b} + \frac{y}{a-b} = 2a \\ \frac{x-y}{2ab} = \frac{x+y}{a^2+b^2} \end{cases}$

6. $\begin{cases} \frac{x}{a+b} + \frac{y}{a-b} = a+b \\ \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 2a \end{cases}$

7. $\begin{cases} \frac{a^2-b^2}{x} + \frac{b^2}{y} = a \\ \frac{a+b}{x} + \frac{b}{y} = 2 \end{cases}$

8. $\begin{cases} (a+b)x+(a-b)y = 2ab \\ (a+c)x+(a-c)y = 2ac \end{cases}$

Scanned with OKEN Scanner

9. $\begin{cases} \frac{x+a}{y-b}=\frac{2a+b}{a-2b} \\ \frac{x+5-y}{y-x+3}=\frac{2b+5}{3-2b} \end{cases}$ **10.** $\begin{cases} \frac{x}{2a-b}-\frac{y}{2a+b}=\frac{8ab}{4a^2-b^2} \\ \frac{x}{2a-b}+\frac{y}{2a+b}=\frac{8a^2+2b^2}{4a^2-b^2} \end{cases}$

V. Rezolvați sistemele:

1. $\begin{cases} \frac{2}{x}=1+\frac{3}{y} \\ \frac{3}{x}+2+\frac{1}{y}=0 \end{cases}$ **2.** $\begin{cases} \frac{1}{x+y}+\frac{1}{x-y}=\frac{5}{8} \\ \frac{1}{x-y}-\frac{1}{x+y}=\frac{3}{8} \end{cases}$

3. $\begin{cases} \frac{1}{x-y+2}+\frac{1}{1-x-y}=0,1 \\ \frac{1}{x-y+2}+\frac{1}{x+y-1}=0,3 \end{cases}$ **4.** $\begin{cases} 6\sqrt{x}-5\sqrt{y}=7 \\ 3\sqrt{x}+2\sqrt{y}=8 \end{cases}$

5. $\begin{cases} 11_{(x)}+21_{(y)}=10 \\ 10_{(x)}-21_{(y)}=-5 \end{cases}$ **6.** $\begin{cases} 4x+3|y-3|=18 \\ 6x+5y=43 \end{cases}$

7. $\begin{cases} \frac{4x-2y+9}{4x-2y+5}+\frac{5}{3x-y+2}=2 \\ \frac{3}{4x-2y+5}+\frac{3x-y+8}{3x-y+2}=2 \end{cases}$ **8.** $\begin{cases} \frac{xy+2x+2y+4}{x+y+4}=\frac{3}{8} \\ \frac{xy+2x+2y+4}{x-y}=\frac{3}{4} \end{cases}$

9. $\begin{cases} 16x+6y-5xy=18 \\ 5x+3y-xy=9 \end{cases}$ **10.** $\begin{cases} \frac{(x+3y-1)(2x-y+2)}{3x+2y+1}=\frac{3}{2} \\ \frac{3}{x+3y-1}+\frac{2}{2x-y+2}=\frac{3}{2} \end{cases}$

*

§ 3. • Probleme care se rezolvă cu ajutorul ecuațiilor de gradul I cu o necunoscută sau cu sisteme de două ecuații de gradul I cu două necunoscute •

1. Suma a trei numere consecutive este egală cu 61. Al doilea număr este mai mare decât primul cu 8, iar numărul al treilea este mai mic decât primul cu 4. Să se afle numerele.

2 Produsul a două numere este egal cu 490. Dacă primul număr ar fi mărit cu 3 unități atunci produsul ar fi fost egal cu 532. Aflați cele două numere.

3. Produsul a două numere este egal cu 23664; dacă din primul se scade 4, produsul se micșorează cu 1632. Să se afle numărul.

4. Suma celor patru termeni ai unei proporții este 65, fiecare din ultimii trei reprezintă $\frac{2}{3}$ din precedentul. Aflați proporția.

5. Să se determine un număr care împărțit la 5 dă restul 1, împărțit la 6 dă restul 2, împărțit la 7 dă restul 5 și suma câturilor este egală cu jumătatea numărului micșorat cu 2.

6. Două automobile au parcurs aceiași distanță. Raportul vitezelor lor este $\frac{4}{3}$, iar unul dintre

automobile parcurge distanța dată cu o oră și jumătate mai repede decât celălalt. Aflați în cât timp ajunge la destinație primul automobil ?

7. Dacă din pătratul unui număr se scade 41, rezultatul se dublează și dacă se adună triplul noului rezultat se obține 64. Aflați numărul.

8. Dacă se mărește lungimea unui dreptunghi cu 60 și se micșorează lățimea cu 30 sau se micșorează lungimea cu 30 și se mărește lățimea cu 24, aria dreptunghiului rămâne neschimbată. Aflați perimetrul dreptunghiului.

9. La dus un automobil grăbit parcurge o anumită distanță în 2 ore și jumătate. La întors, aceiași distanță o parcurge în 3 h 7 min și 30 sec, având o viteză mai mică cu 20 km / h decât la dus. Aflați viteza automobilului la întoarcere și distanța parcursă.

10. Diferența a două numere naturale este de 3, iar suma pătratelor lor este 29. Aflați cele două numere.

11. Media aritmetică a patru numere este 4. Se știe că media aritmetică a primelor două este $\frac{1}{3}$ din media arimetică a ultimelor numere. Suma dintre primul număr și cel de-al treilea este $\frac{3}{5}$ din suma dintre al doilea și al patrulea, iar primul număr și ultimul au aceiași medie aritmetică ca al doilea și al treilea . Să se afle numerele.

12. Un cercetător are nevoie de 1000 grame soluție de HCl de concentrație 20 %, dar el nu are decât soluție de HCl de concentrație 30 % și 15 %. Cât trebuie să folosească din fiecare tip ?

13. Un tată îi spune fiului său: *peste 3 ani voi fi de 3 ori mai bătrân decât tine, iar peste 12 ani voi fi de două ori mai bătrân decât tine*. Aflați ce vârstă are fiecare.

14. Fie A, B, C trei puncte astfel încât B se află pe segmentul $[AC]$. Dacă B ar fi mai aproape de C cu 2,(3) cm atunci ar fi mijlocul segmentului $[AC]$. Aflați lungimile segmentelor AB și AC știind că raportul lor este $\frac{2}{11}$.

15. Trei echipe de muncitori lucrează la săpatul unui canal. Primele două echipe ar termina lucrarea în 3 zile, ultimele două în 4 zile, iar prima și a treia în 6 zile. În câte zile ar termina lucrarea fieare echipă în parte ?

16. Două camioane transportă cantități egale de ciment pentru construcția a două clădiri. Pentru construcția cea mai apropiată, un camion transportă la fiecare drum 1,5 t; celălalt camion transportă la cealaltă construcție cu $\frac{2}{3}$ t mai mult ca primul la fiecare transport. Până la amiază al doilea camion face cu 3 drumuri mai puțin ca primul, rămânând netransportate $3\frac{1}{2}$ t de ciment pentru clădirea apropiată și 4 t pentru cea depărtată. a) Câte tone de ciment trebuie transportat pentru fiecare clădire ? b) Câte drumuri a făcut fiecare camion ?

17. 380 ha grâu și 230 ha secară trebuiau recoltate timp de două săptămâni. În prima săptămână s-au recoltat de două ori mai multe hectare de grâu decât secară, iar în a doua de două ori și jumătate mai multe hectare de secară decât grâu. Câte hectare de grâu s-au recoltat în prima săptămână ?

18. Două secții ale unei uzine au produs împreună într-un an 8900 de piese. În anul următor producția primei secții a crescut cu 12 %, iar a celei de a doua cu 10 %, așa încât cea de-a doua secție a produs cu 2686 mai multe piese decât prima secție. Câte piese a produs fiecare secție în primul an ?

19. O roată dințată, A, are 60 de dinți și face 80 de rotații pe minut. O altă roată, B, angrenată cu prima are 48 de dinți. Câte rotații face roata B pe minut ? Dacă la momentul t un dinte a al roții A este angrenat cu dintele b al roții B, peste cât timp dinții a și b se angrenează din nou?

Scanned with OKEN Scanner

20. Într-o excursie, timpul coborârii de pe munte a fost de 1,2 ori mai mic decât timpul necesar urcușului. Care este distanța parcursă până în vârful muntelui, știind că la urcare pe munte s-a parcurs, în medie, 106,2 m în 1 / 5 oră, iar timpul de coborâre a fost 3 / 5 din timpul de urcare ?

21. Luni la ora 5 dimineața a plecat dintr-un port către altul un vapor cu pasageri; în același timp a plecat din al doilea port către primul un șlep cu viteza 1 / 2 din viteza vaporului. Cele două nave s-au întâlnit la ora 11 noaptea în aceiași zi. Când va ajunge fiecare la destinație ?

22. Într-o lună, două echipe aveau de efectuat 2750 de piese. Prima echipă a depășit planul cu 20 %, iar a doua cu 15 %. În acest fel prima echipă a efectuat în acea lună cu 480 de piese mai mult ca a doua. Să se calculeze:

a) numărul de piese planificate inițial pentru fiecare echipă.

b) numărul de piese realizate peste plan de fiecare echipă.

23. În apă o medalie cântărește 22,5 g, iar în aer 25 g. Medalia fiind un aliaj de cupru și argint, se cere ce cantitate din fiecare metal conține, știind că densitatea cuprului este de $8800\,kg/m^3$, iar a argintului de $10450\,kg/m^3$.

24. Se amestecă 15 kg acid sulfuric cu concentrația de 40 % cu apă și se obține o soluție cu o concentrație de 15 %. Se cere masa amestecului.

25. Pentru a prepara 40 kg acid de 20 %, se amestecă acid de 80 % cu acid de 15 %. Ce cantități de acid se vor folosi din fiecare fel ?

26. Prima cifră a unui număr de șase cifre este 9. Dacă se ia această cifră de la început și se așează la sfârșitul numărului, se obține sfertul primului număr. Care este numărul inițial ?

27. Un obiect care are masa de 300 g este alcătuit din aur și argint. În apă el are o masă cu 20 g mai mică. Se cere masa de aur și argint din acel obiect știind că densitatea aurului este de $19200\,kg/m^3$, a argintului $10500\,kg/m^3$ și a apei $1000\,kg/m^3$.

28. Roata din față a unei căruțe a făcut pe o anumită distanță cu 15 învârtituri mai mult ca cea din spate. Circumferința roții din față este de 2,5 m, iar a celei din spate de 4 m. Câte învârtituri face fiecare roată și ce distanță a parcurs căruța ?

29. Un turist trebuie să parcurgă distanța dintre orașele A și B. Dacă ar folosi motocicleta, cu viteza de 35 km / h, ar întârzia două ore, iar dacă ar folosi automobilul, cu 50 km / h, ar sosi cu 1 oră mai devreme. Să se determine distanța dintre A și B.

30. Doi turiști merg unul către celălalt din orașele A și B, situate la distanța de 30 km. Dacă primul pornește cu două ore înaintea celui de-al doilea ei se întâlnesc după $2\frac{1}{2}$ ore de la plecarea celui de-al doilea turist, iar dacă al doilea pornește cu două ore înaintea primului, ei se întâlnesc după 3 ore de la plecarea primului turist. Care este viteza fiecărui turist ?

31. După ce a parcurs 13 km, un excursionist constată că mai are de parcurs 2 / 5 din restul drumului pentru a ajunge la jumătatea lui. Să se determine lungimea drumului. Câți kilometri mai trebuie parcurși pentru a străbate 3 / 5 din drum ?

32. O echipă (*a doua*) a realizat de patru ori mai multe piese ca prima, a treia cât media geometrică a primelor două, iar a patra cât media aritmetică a echipelor a doua și a treia. Cele patru echipe realizează împreună 100 de piese care reprezintă 1 / 2 din întreaga producție. Câte piese trebuie să mai lucreze fiecare echipă pentru a realiza fiecare același număr de piese ?

33. Doi muncitori lucrând împreună realizează o lucrare în 8 ore. Primul, lucrând separat, poate realiza întreaga lucrare cu 12 ore mai repede ca al doilea. În câte ore, lucrând separat, ar putea termina fiecare lucrarea ?

34. Un triunghi are ipotenuza 25 cm, iar suma dintre o catetă și proiecția ei pe ipotenuză este de 24 cm. Se cer lungimile catetelor.

Scanned with OKEN Scanner

35. Aria unui triunghi dreptunghic este de 24 cm ^{2}, iar lungimea ipotenuzei de 10 cm. Se cere lungimea catetelor.

36. La un concurs sportiv s-au acordat trei premii în valoare totală de 825000 lei. Ce sumă a valorat fiecare premiu știind că premiul I a fost cu 175000 lei mai mare ca al II-lea, iar al II-lea jumătate din valoarea premiului I și III la un loc.

37. Să se determine cel mai mic număr natural care împărțit la 6 să dea restul 5 și împărțit la 5 să dea restul 4.

38. Un număr natural de trei cifre, în baza 10, împărțit la răsturnatul său dă câtul 2 și restul 100. Care este numărul dacă diferența dintre cifra sutelor și cea a unităților este 4 ?

39. Suma a trei numere naturale diferite este 54. Se cer numerele știind că unul este media aritmetică a celorlalte două și că fiecare număr este divizibil cu 6.

40. Trei numere naturale îndeplinesc următoarele condiții: a) al doilea este de trei ori mai mare ca primul; b) al treilea este de două ori mai mare ca al doilea; c) produsul celor trei numere se divide cu suma lor. Demonstrați că suma numerelor se divide cu 50.

41. Pentru golirea unui bazin cu apă se pot utiliza 3 robineți. Dacă primul robinet este deschis 2 ore, al II-lea și al III-lea 6 ore, se evacuează în total 220 l de apă. Lăsându-se deschise 3 ore, 2 ore și respectiv 6 ore, se evacuează 210 l de apă. Dacă primul și al doilea robinet sunt deschise câte 2 ore, iar al treilea 3 ore, se scurg 145 l de apă. Să se afle debitul fiecărui robinet.

42. Vârsta tatălui este de patru ori mai mare decât vârsta fiului. Dacă ei au împreună 40 de ani, se cere vârsta fiecăruia.

43. Într-un bloc sunt 39 de apartamente cu 4 și 3 camere. Câte apartamente sunt de fiecare tip, dacă în total sunt 141 de camere ?

44. Un muncitor poate săpa un șanț în 3 ore, iar al 2-lea în 6 ore. În cât timp pot săpa șanțul cei 2 muncitori lucrând împreună ?

45. La un concurs de șah, primii trei clasați au în total 35 de puncte. Primul concurent are cu un punct mai mult decât al doilea, iar al treilea cu o jumătate de punct mai puțin decât al doilea. Câte puncte are fiecare dintre cei 3 concurenți ?

46. Un muncitor execută 200 de piese de două categorii care cântăresc împreună 67,5 kg. Fiecare piesă din prima categorie cântărește 0,3 kg și fiecare piesă din a doua categorie cântărește 0,45 kg. Să se afle câte piese din fiecare categorie a executat muncitorul.

47. Distanța dintre două porturi este de 252 km. Un vapor parcurge această distanță, mergând în sensul curentului apei în 6 ore. În cât timp parcurge aceiași distanță la întoarcere, mergând în sensul opus curentului apei, știind că în această situație face cu 6 km / h mai puțin ?

48. Pentru umplerea unui rezervor cu apă se folosesc 4 robinete de două tipuri, cu debite de 250 l / h și respectiv 270 l / h. Într-o oră, prin cele 4 robinete curg 1060 l de apă. Să se afle câte robinete sunt de fiecare tip.

49. Compuneți o problemă ale cărei date să corespundă ecuației:

$$[(2x - 150) \cdot 2 - 200] \cdot 2 - 250 = 50.$$

50. O barcă cu motor parcurge pe un râu 132 km, deplasându-se 12 ore împotriva curentului și 4 ore în sensul curentului apei. Viteza de deplasare împotriva curentului apei este de 3 ori mai mică decât viteza în sensul curentului. Care este viteza râului ?

*
* *

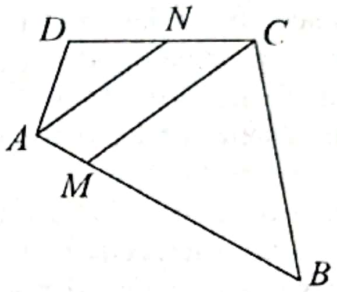
Scanned with OKEN Scanner

CAP. III. ◆ PATRULATERE ◆

§ 1. ● Patrulatere convexe ● Patrulatere concave ● ● Suma măsurilor unghiurilor unui patrulater convex ●

1. Calculați măsurile unghiurilor unui patrulater convex cunoscând că sunt direct proporționale cu 2, 4, 5 și 7.

2. În figura alăturată, $ABCD$ este patrulater convex, $M \in (AB)$, $N \in (CD)$ și $[AD] \equiv [DN]$, $[BM] \equiv [BC]$. Demonstrați că: a) Dacă unghiurile $\sphericalangle BAD$ și $\sphericalangle BCD$ sunt suplementare, atunci unghiurile $\sphericalangle DNA$ și $\sphericalangle CMB$ sunt complementare. b) Dacă unghiurile $\sphericalangle DNA$ și $\sphericalangle CMB$ sunt complementare, atunci unghiurile $\sphericalangle BAD$ și $\sphericalangle BCD$ sunt suplementare.



3. Un patrulater convex este descompus de o diagonală într-un triunghi echilateral și un triunghi isoscel cu un unghi de măsură 40°. Calculați măsurile unghiurilor patrulaterului. *Studiați toate posibilitățile.*

4. a) Calculați măsurile unghiurilor patrulaterului convex $ABCD$ cunoscând că:

$$m(\sphericalangle B) - m(\sphericalangle A) = m(\sphericalangle C) - m(\sphericalangle B) = m(\sphericalangle D) - m(\sphericalangle C) = 20°.$$

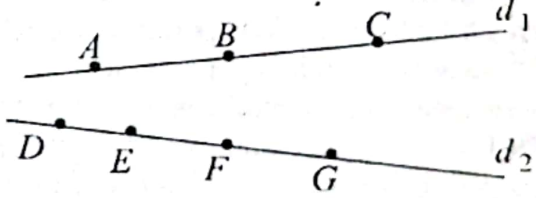
b) Demonstrați că $AB \parallel CD$.

5. Fie O un punct situat în interiorul triunghiului ABC. Câte patrulatere distincte putem forma cu vârfurile în punctele O, A, B, C? Sunt acestea convexe sau concave?

6. *Desenați*: a) Un patrulater convex pe care o diagonală îl descompune în două triunghiuri isoscele congruente, având câte un unghi de măsură 120°. b) Aceeași problemă pentru un patrulater concav.

7. a) Există un patrulater convex în care unghiurile $\sphericalangle A$ și $\sphericalangle B$ să fie complementare și de asemenea unghiurile $\sphericalangle B$ și $\sphericalangle C$ să fie complementare? b) Dar un patrulater concav?

8. În figura alăturată, punctele $A, B, C \in d_1$, iar punctele $D, E, F, G \in d_2$. Câte patrulatere convexe distincte putem forma având vârfurile printre cele 7 puncte A, B, C, D, E, F, G?



9. Calculați măsurile unghiurilor unui patrulater convex știind că suma măsurilor a două dintre ele este egală cu 160° și patrulaterul are trei unghiuri congruente. *Discuție*!

10. Patrulaterul convex $ABCD$ are perimetrul 50 cm, $3AB = AD + CD$, triunghiurile ABD și BCD au perimetre egale, iar perimetrul triunghiului ACD este cu 10 cm mai mare decât perimetrul triunghiului ABC. a) Aflați lungimile laturilor. b) Demonstrați că diagonalele sunt perpendiculare.

11. Patrulaterul convex $ABCD$ are $m(\sphericalangle B) = m(\sphericalangle C) = m(\sphericalangle D)$ și $[AB \cap [DC = \{O\}$. Cunoscând că $[OD] \equiv [AD]$, aflați măsurile unghiurilor patrulaterului.

*

§ 2. • Paralelogramul •

12. Perimetrul unui paralelogram este 28 cm. O diagonală împarte paralelogramul în două triunghiuri așa încât perimetrul unuia dintre aceste triunghiuri este 26 cm. Aflați lungimea acestei diagonale.

13. Un paralelogram are perimetrul 20 cm și diferența perimetrelor a două dintre cele patru triunghiuri determinate de diagonale este 2 cm. Aflați lungimile laturilor.

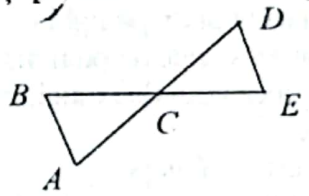
14. Fie $ABCD$ un paralelogram cu $AB > BC$, iar $DE \perp AB$, $DF \perp CB$, $E \in (AB)$, $F \in (BC)$. a) Demonstrați că $\sphericalangle ADE \equiv \sphericalangle CDF$ și $\sphericalangle EDF \equiv \sphericalangle DAB$.
b) Știind că $3\,m(\sphericalangle EDF) = 2\,m(\sphericalangle ADC)$ aflați măsurile unghiurilor paralelogramului.

15. Fie d_1, d_2 dreptele paralele, $A, B \in d_1$, iar $C, D, E, F \in d_2$ cu $AC \parallel BE$ și $AD \parallel BF$. Demonstrați că mijlocul segmentului $[DE]$ coincide cu mijlocul segmentului $[CF]$.

16. Fie $ABCD$ un paralelogram cu $AB = 2\,BC$ și M mijlocul laturii $[CD]$. Calculați măsura unghiului $\sphericalangle AMB$.

17. Fie $ABCD$ un patrulater convex cu proprietatea că triunghiurile ABC și ACD au același perimetru și de asemenea, triunghiurile BCD și ABD au același perimetru. Ce fel de patrulater este $ABCD$?

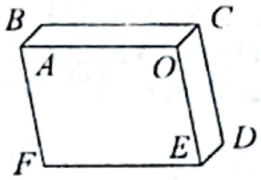
18. În figura alăturată avem: $[AB] \equiv [AC] \equiv [CD] \equiv [DE]$, punctele A, C și D sunt coliniare, iar $\sphericalangle BAC \equiv \sphericalangle CDE$. Demonstrați că: a) punctele B, C, E sunt coliniare; b) $ABDE$ este paralelogram.



19. Fie $ABCD$ un paralelogram în care diagonala $[BD]$ este perpendiculară pe BC, iar lungimea laturii $[AB]$ este o treime din perimetrul paralelogramului. a) Arătați că $AB = 2\,AD$. b) Paralela prin C la BD intersectează pe AD în E. Arătați că triunghiul ABE este echilateral. c) Calculați măsurile unghiurilor paralelogramului dat.

20. Pe laturile (AB) și (CD) ale paralelogramului $ABCD$ considerăm punctele mobile M și N așa încât $[AM] \equiv [CN]$. Arătați că MN trece printr-un punct fix.

21. În figura alăturată, patrulaterele $ABCO$, $OCDE$ și $OEFA$ sunt paralelograme. Arătați că $\Delta ACE \equiv \Delta DFB$.



22. Fie $ABCD$ un paralelogram. Notăm cu M mijlocul laturii $[AB]$, iar cu N mijlocul laturii $[CD]$. Dreptele MD și NB intersectează diagonala $[AC]$ în E și F. Demonstrați că:
a) $[AE] \equiv [EF] \equiv [FC]$; b) $BEDF$ este paralelogram.

23. Fie $ABCD$ paralelogram în care $AB > BC$, $[AE$ bisectoarea unghiului $\sphericalangle A$, $[BF$ bisectoarea unghiului $\sphericalangle B$ $(E, F \in (DC))$, X mijlocul segmentului $[AE]$, iar Y mijlocul segmentului $[BF]$. a) Demonstrați că $DXYF$ este paralelogram. b) Dacă $7\,AD = 3\,AB$ și $XY = 24$ cm, aflați perimetrul paralelogramului $ABCD$.

24. Fie $ABCDEF$ un poligon convex cu 6 laturi (*hexagon*) având proprietatea că laturile $[AB]$ și $[ED]$ sunt congruente și paralele și de asemenea, laturile $[BC]$ și $[FE]$ sunt congruente și paralele. Demonstrați că laturile $[CD]$ și $[AF]$ sunt congruente și paralele.

25. Fie $ABCD$ un paralelogram cu $AB > BC$ și $AM \perp BC$, $CP \perp AD$, $AN \perp CD$, $CQ \perp AB$,

Scanned with OKEN Scanner

$N \in DC$, $M \in BC$, $P \in AD$, $Q \in AB$. Arătați că $MNPQ$ este paralelogram și că centrul său coincide cu centrul paralelogramului $ABCD$.

26. Fie $ABCD$ un paralelogram, $DE \perp AB$, $BF \perp CD$, $BH \perp AD$, $DG \perp BC$, $E \in (AB)$, $F \in (DC)$, $N \in (AD)$, $G \in (BC)$. Dreptele BH și DE se intersectează în I, iar DG și BF se intersectează în J. a) Demonstrați că $EGFH$ este paralelogram. b) Demonstrați că segmentele $[IJ]$, $[HG]$ și $[EF]$ au un punct comun.

27. Fie segmentele $[AB]$ și $[CD]$ congruente și paralele și M mijlocul lui $[AB]$, iar N mijlocul lui $[CD]$. a) Câte paralelograme diferite putem construi având vârfurile printre cele 6 puncte date? b) Demonstrați că centrele tuturor acestor paralelograme sunt coliniare.

*

§ 3. • Dreptunghiul •

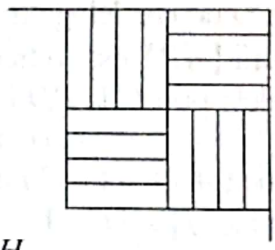
28. Perimetrul unui dreptunghi este 248 cm, iar lungimea este cu 34 cm mai mare decât lățimea. Aflați dimensiunile dreptunghiului.

29. Lățimea unui dreptunghi reprezintă 5/9 din lungime, iar perimetrul este de 308 cm. Calculați dimensiunile dreptunghiului.

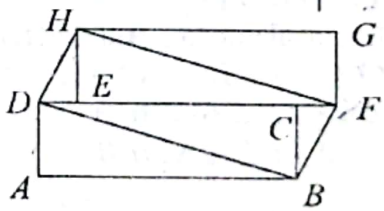
30. Lungimea unui dreptunghi reprezintă 40 % din perimetru. Aflați raportul dintre lungime și lățime.

31. Lățimea unui dreptunghi reprezintă 1/6 din perimetru și ese cu 49 cm mai mică decât lungimea. Aflați perimetrul dreptunghiului.

32. O cameră în formă de dreptunghi are dimensiunile de 5 m și 3,6 m. Pentru parchetarea ei se folosesc plăcuțe de lemn dreptunghiulare de dimensiuni egale, așezate ca în figură. Cunoscând că perimetrul unei plăcuțe este 50 cm, aflați câte plăcuțe sunt necesare.

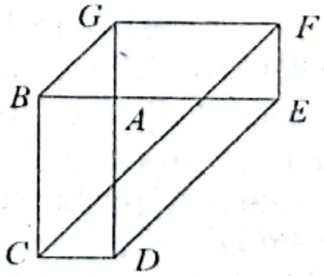


33. În figura lăturată, $ABCD$ și $EFGH$ sunt dreptunghiuri având aceleași dimensiuni. Demonstrați că $BFHD$ este paralelogram.



34. Dreptele XY și ZT sunt paralele, $A \in (XY)$, $B \in (ZT)$. Bisectoarele unghiurilor $\sphericalangle XAB$ și $\sphericalangle ZBA$ se intersectează în D, iar bisectoarele unghiurilor $\sphericalangle YAB$ și $\sphericalangle TBA$ se intersectează în C. Demonstrați că: a) $ACBD$ este dreptunghi; b) $CD \parallel XY$.

35. Dreptunghiurile din figura alăturată au $[AB] \equiv [AG]$ și $[AD] \equiv [AE]$. Punctele A, B, E sunt coliniare și punctele A, D, G sunt coliniare. Demonstrați că $BG \parallel DE \parallel CF$.



36. Pe laturile (AB), (BC), (CD) și (DA) ale dreptunghiului $ABCD$ considerăm respectiv punctele E, F, G și H. Demonstrați că patrulaterul $EFGH$ este dreptunghi dacă și numai dacă $\sphericalangle AEH \equiv \sphericalangle BFE \equiv \sphericalangle CGF \equiv \sphericalangle DHG$.

Scanned with OKEN Scanner

37. Fie $ABCD$ un dreptunghi, $DE \perp AC$ și $BF \perp AC$. Arătați că dacă $[EF] \equiv [AD]$, atunci diagonalele dreptunghiului formează un unghi cu măsura $60°$.

*

§ 4. • Rombul •

38. Diagonala $[AC]$ a rombului $ABCD$ are 13 cm, iar perimetrul rombului este 52 cm. Aflați măsurile unghiurilor rombului.

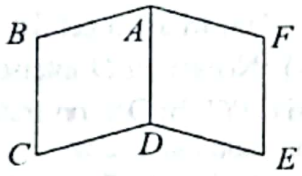
39. Bisectoarea unghiului $\sphericalangle A$ a triunghiului ABC taie latura (BC) în D. Ducem $DE \parallel AB$, $DF \parallel AC$, $E \in (AC)$, $F \in (AB)$. Demonstrați că $AFDE$ este romb.

40. Prin punctul O de intersecție a diagonalelor dreptunghiului $ABCD$ ducem $MN \perp AB$ și $PQ \perp AD$, $M \in (AB)$, $N \in (DC)$, $P \in (AD)$, $Q \in (BC)$. Demonstrați că $MQNP$ este romb.

41. Prin punctul O de intersecție a diagonalelor rombului $ABCD$ ducem $MN \perp AB$ și $PQ \perp AD$, $P \in (AD)$, $M \in (AB)$, $Q \in (BC)$, $N \in (DC)$. Demonstrați că $MQNP$ este dreptunghi.

42. În figura alăturată, $ABCD$ și $ADEF$ sunt romburi. Demonstrați că $BCEF$ este dreptunghi dacă și numai dacă

$$m(\sphericalangle BAD) = m(\sphericalangle DAF).$$



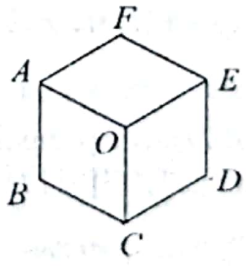
43. Într-un patrulater convex, lungimea fiecărei laturi este egală cu media aritmetică a lungimilor celorlalte trei laturi. Demonstrați că patrulaterul este romb.

44. Într-un patrulater convex, lungimea fiecărei laturi este egală cu media aritmetică a lungimilor celor două laturi alăturate. Demonstrați că patrulaterul este romb.

45. Fie $ABCD$ un patrulater în care măsura fiecărui unghi este egală cu media aritmetică a măsurilor celorlalte trei unghiuri. a) Demonstrați că $ABCD$ este dreptunghi. b) Ducem în A și C câte o dreaptă perpendiculară pe AC, iar în B și D câte o dreaptă perpendiculară pe BD. Aceste patru drepte se taie două câte două formând un patrulater. Demonstrați că acest patrulater este romb.

46. Pe laturile rombului $ABCD$ construim spre exterior triunghiurile ABE, BCF, CDG și DAH așa încât $[EA] \equiv [EB] \equiv [FB] \equiv [FC] \equiv [GC] \equiv [GD] \equiv [HD] \equiv [HA]$. Demonstrați că patrulaterul $EFGH$ este dreptunghi.

47. În figura alăturată cunoaștem că $OABC$, $OCDE$ și $OEFA$ sunt romburi, iar $[OB] \equiv [OD] \equiv [OF]$.
a) Aflați măsurile unghiurilor rombului. b) Demonstrați că ACE și BDF sunt triunghiuri echilaterale congruente.



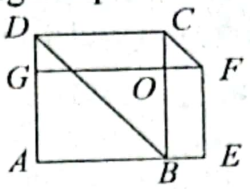
*

§ 5. • Pătratul •

48. Un dreptunghi are lățimea egală cu $\frac{1}{12}$ din perimetru, iar lungimea este cu 60 cm mai mare

decât lățimea. Aflați latura unui pătrat care are perimetrul egal cu perimetrul dreptunghiului.

49. În figura alăturată $ABCD$ este pătrat, iar $AEFG$ e dreptunghi cu perimetrul 100 cm. Cunoscând că $BD \parallel CF$, aflați lungimea laturii lui $ABCD$.



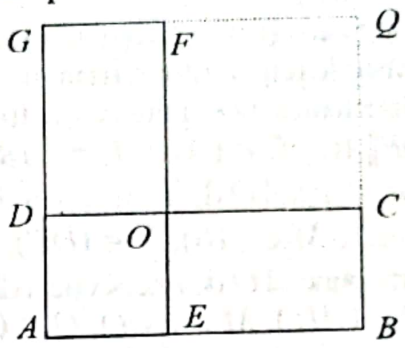
50. Demonstrați că dacă măsura unui unghi al unui romb este egală cu media aritmetică a măsurilor celor două unghiuri alăturate, atunci rombul este pătrat.

51. În figura alăturată, $ABCD$ și $AEFG$ sunt dreptunghiuri, $[AE] \equiv [AD]$ și $[AB] \equiv [AG]$. EF și CD se taie în O, iar BC și GF se intersectează în Q. Demonstrați că: a) $AEOD$ și $OCQF$ sunt pătrate.

b) Punctele A, O, Q sunt coliniare.

c) $[DF] \equiv [EC]$.

d) Perimetrul dreptunghiului $EBCO$ este egal cu media aritmetică a perimetrelor pătratelor $AEOD$ și $OCQF$.

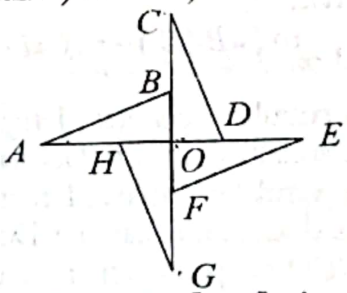


52. Fie ABC un triunghi echilateral, iar $MNPQ$ pătrat cu $M, N \in (BC)$, $P \in (AC)$, $Q \in (AB)$. Notăm cu O intersecția diagonalelor pătratului. a) Calculați măsurile unghiurilor QOB și OPC. b) Demonstrați că $AO \perp BC$.

53. În figura alăturată avem:

$$\Delta AOB \equiv \Delta COD \equiv \Delta EOF \equiv \Delta GOH.$$

Demonstrați că $ACEG$ este pătrat.

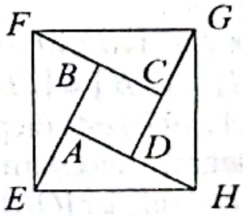


54. Fie $ABCD$ un romb având $m(\sphericalangle A) = 45°$. Notăm cu M mijlocul lui $[AB]$, iar cu N mijlocul lui $[CD]$. Perpendiculara dusă în punctul M pe AB taie diagonala $[AC]$ în E, iar perpendiculara dusă în punctul N pe CD taie diagonala $[AC]$ în F. Demonstrați că $BEDF$ este pătrat.

55. În figura alăturată, cunoscând că

$$\Delta AEH \equiv \Delta DHG \equiv \Delta CGF \equiv \Delta BFE,$$

arătați că $ABCD$ și $EFGH$ sunt pătrate.



56. Fie $ABCD$ un dreptunghi cu proprietatea că există M pe diagonala $[AC]$ așa ca M să nu fie mijlocul lui $[AC]$ și $[DM] \equiv [MB]$. Demonstrați că $ABCD$ este pătrat.

*

§ 6. • Trapezul •

57. Măsurile unghiurilor A, B, C, D ale patrulaterului convex $ABCD$ satisfac relațiile:

$$m(\sphericalangle B) = m(\sphericalangle C) = \frac{1}{2}\left(m(\sphericalangle A) + m(\sphericalangle D)\right), m(\sphericalangle A) \neq m(\sphericalangle D).$$

Scanned with OKEN Scanner

Demonstrați că $ABCD$ este trapez dreptunghic.

58. Fie $ABCD$ un trapez ($AB \| CD$). Cunoscând că $m(\sphericalangle D) - m(\sphericalangle A) = 40°$, iar $m(\sphericalangle B) - m(\sphericalangle A) = 10°$, aflați măsurile unghiurilor trapezului.

59. Fie $ABCD$ un trapez cu $AB \| CD$ și $AB > CD$. Paralela dusă prin C la AD intersectează AB în M. Cunoscând că $CD = 10$ cm, iar perimetrul triunghiului BCM este 23 cm, aflați perimetrul trapezului.

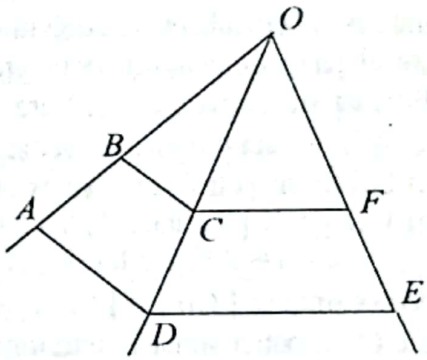
60. Trapezul $ABCD$ în care $AB \| CD$ și $AB > CD$ are proprietatea că paralela dusă prin D la BC îl descompune într-un romb și un triunghi echilateral. Aflați perimetrul trapezului cunoscând că perimetrul rombului este 44 cm.

61. Un trapez isoscel are perimetrul 70 cm, iar lungimea liniei mijlocii egală cu 20 cm. Aflați lungimea uneia dintre laturile neparalele.

62. Fie $ABCD$ un trapez isoscel cu $AB \| CD$. Cunoscând că $5\, m(\sphericalangle A) = m(\sphericalangle C)$, aflați măsurile unghiurilor trapezului.

63. Pe latura (OX a unghiului $\sphericalangle XOY$ se dau punctele A și B. Construiți punctele C și D pe (OY așa încât $ABCD$ să fie trapez isoscel.

64. În figura alăturată AB, CD și EF sunt concurente în O, iar $ABCD$ și $CDEF$ sunt trapeze isoscele. Demonstrați că $ABEF$ este trapez isoscel.



65. Fie ABC un triunghi, M mijlocul lui $[AB]$ și N mijlocul lui $[AC]$. Notăm cu P simetricul lui B față de N, iar cu Q simetricul lui C față de M. a) Arătați că $BCPQ$ este trapez. b) Arătați că $A \in (PQ)$. c) Dacă perimetrul triunghiului ABC este 40 cm, iar perimetrul trapezului $BCPQ$ este 52 cm, aflați lungimea liniei mijlocii a trapezului. d) Arătați că trapezul $BCPQ$ e isoscel dacă și numai dacă triunghiul ABC este isoscel.

66. Un trapez $ABCD$ ($AB \| CD$) are proprietatea că bisectoarele unghiurilor A și B se intersectează într-un punct E situat pe baza mică $[CD]$. Dacă perimetrul trapezului este 60 cm și linia mijlocie este 21 cm, aflați lungimile bazelor trapezului.

67. Fie $ABCD$ un trapez în care $AB \| CD$, $AB = 2a$, $BC = CD = DA = a$. a) Aflați măsurile unghiurilor trapezului; b) Demonstrați că $AC \perp BC$ și $BD \perp AD$. c) Aflați măsura unghiului $\sphericalangle AOB$, unde cu O am notat intersecția diagonalelor.

68. Trapezul isoscel $ABCD$ ($AB \| CD$) are $m(\sphericalangle DAB) = 60°$, iar lungimea liniei mijlocii reprezintă 3/4 din lungimea bazei mari. Notăm cu O intersecția diagonalelor, iar cu M și N mijloacele segmenetelor $[OA]$ și $[OB]$. Arătați că $CDMN$ este dreptunghi.

69. Fie $ABCD$ un trapez isoscel cu diagonalele perpendiculare. Notăm cu M, N, P, Q mijloacele laturilor $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$, $[DA]$. a) Ce fel de patrulater este $MNPQ$? b) Deduceți că într-un trapez isoscel cu diagonalele perpendiculare, înălțimea este congruentă cu linia mijlocie.

70. Fie $ABCD$ un trapez ($AB \| CD$), M mijlocul lui $[AD]$, iar N mijlocul lui $[BC]$. Fie $E \in [AB]$, $F \in [MN]$, $G \in [CD]$ așa ca: $\frac{AE}{AB} = \frac{MF}{MN} = \frac{DG}{DC} = \frac{1}{3}$. Demonstrați că E, F și G sunt coliniare și $[FG] \equiv [FE]$.

Scanned with OKEN Scanner

71. Fie $ABCD$ un trapez dreptunghic ($m(\sphericalangle A) = m(\sphericalangle D) = 90°$), cu proprietatea că există $E \in (BC)$ așa încât $[EB] \equiv [AB]$ și $[EC] \equiv [CD]$. Notăm cu M mijlocul lui $[AD]$. Demonstrați că: a) $DE \perp AE$; b) $CM \perp MB$; c) $CM \parallel AE$ și $DE \parallel MB$.

*

• Probleme diverse •

72. Notăm: T – mulțimea patrulaterelor; P – mulțimea paralelogramelor; D – mulțimea dreptunghiurilor; R – mulțimea romburilor; Q – mulțimea pătratelor. Stabiliți valoarea de adevăr a propozițiilor de mai jos: a) $Q \subset D$; b) $R \cap D = \varnothing$; c) $R \cap D = Q$; d) $D \subset P$; e) $R - P = \varnothing$; f) $T = P \cup D \cup R \cup Q$; g) $Q \subset D \subset P \subset T$; h) $Q \subset R \subset P \subset T$.

73. *Construiți*: a) Un patrulater cu diagonalele congruente și perpendiculare, care să nu fie pătrat; b) un patrulater cu două unghiuri drepte care să nu fie trapez sau paralelogram; c) un patrulater cu două laturi congruente și două laturi paralele care să nu fie paralelogram.

74. Patrulaterul convex $ABCD$ are proprietatea că diagonala $[AC]$ îl descompune în două triunghiuri dreptunghice isoscele. Ce fel de patrulater poate fi $ABCD$?

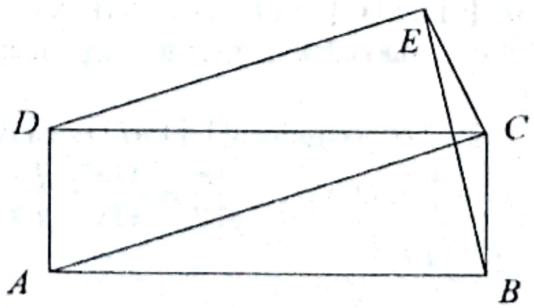
75. a) Există un patrulater convex $ABCD$ cu $m(\sphericalangle A) = 50°$ și $m(\sphericalangle B) = m(\sphericalangle D) = 20°$? b) Construiți patrulaterul $ABCD$ în care $AB = AD = 6$ cm, $m(\sphericalangle A) = 50°$ și $m(\sphericalangle B) = m(\sphericalangle D) = 20°$. Ce fel de patrulater este $ABCD$? c) Pentru patrulaterul de la punctul b) demonstrați că $[CB] \equiv [CD]$ și $AC \perp BD$.

76. Fie O un punct situat în interiorul patrulaterului convex $ABCD$. Notăm cu A', B', C', D' simetricele punctului O față de A, B, C și D, respectiv. a) Demonstrați că unghiurile patrulaterului $A'B'C'D'$ sunt congruente cu cele ale patrulaterului $ABCD$. b) Calculați raportul perimetrelor celor două patrulatere.

77. Fie $ABCD$ un patrulater convex. Notăm cu M, N, P, Q mijloacele laturilor $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ și $[DA]$. Completați propozițiile următoare: a) $MNPQ$ este ..... ; b) Dacă $ABCD$ este trapez, atunci $MNPQ$ este ..... ; c) Dacă $ABCD$ este trapez isoscel, atunci $MNPQ$ este ..... ; d) Dacă $ABCD$ este paralelogram, atunci $MNPQ$ este ..... ; e) Dacă $ABCD$ este dreptunghi, atunci $MNPQ$ este ..... ; f) Dacă $ABCD$ este romb, atunci $MNPQ$ este ..... ; g) Dacă $ABCD$ este pătrat, atunci $MNPQ$ este ..... .

78. Fie $ABCD$ un patrulater convex, iar M, N, P, Q mijloacele laturilor $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ și $[DA]$. Completați propozițiile: a) Dacă $MNPQ$ este dreptunghi, atunci $[AC]$ și $[BD]$ sunt ..... ; b) Dacă $MNPQ$ este romb, atunci $[AC]$ și $[BD]$ sunt ..... ; c) Dacă $MNPQ$ este pătrat, atunci $[AC]$ și $[BD]$ sunt ..... .

79. În figura următoare, $ABCD$ este dreptunghi și $ACED$ este trapez isoscel ($AC \parallel DE$ și $[AD] \equiv [CE]$). Arătați că $DE \perp BE$.



Scanned with OKEN Scanner

80. Fie ABC un triunghi dreptunghic ($m(\sphericalangle A) = 90°$), iar M un punct situat pe (BC). Paralela dusă prin M la AB taie pe (AC) în P, iar paralela dusă prin M la AC taie pe (AB) în N. Notăm cu E simetricul lui M față de N, iar cu F simetricul lui M față de P. a) Demonstrați că E, A, F sunt coliniare și $[EA] \equiv [AF]$. b) Pentru ce poziție a punctului M patrulaterul $BEFC$ este paralelogram ?

81. Fie $ABCD$ un paralelogram, M mijlocul lui $[AB]$, iar N mjlocul lui $[CD]$. Perpendiculara în M pe AB intersectează (CD) în P, iar perpendiculara în N pe CD intersectează (AB) în Q. Demonstrați că $AQPD$ și $QBCP$ sunt trapeze isoscele.

82. În triunghiul ABC notăm cu D și E mijloacele laturilor $[AB]$ și $[AC]$, iar M este un punct mobil în interiorul triunghiului. Fie N simetricul lui M față de D, iar P simetricul lui M față de E. Arătați că: a) $BN \parallel CP$; b) NP este constantă ; c) $[BP] \equiv [CN]$ dacă și numai dacă M se află pe înălțimea din A a triunghiului ABC.

83. Fie $ABCD$ un paralelogram în care $AB > BC$, $[AE$ este bisectoarea unghiului BAD, iar $[BF$ este bisectoarea unghiului ABC, $E, F \in (DC)$. a) Ce unghi formează dreptele AE și BF ? b) Demonstrați că $[DF] \equiv [EC]$. c) Notăm cu M mijlocul segmentului $[AF]$, iar cu N mijlocul segmentului $[BE]$. Arătați că $[MN] \equiv [AD]$. d) Demonstrați că $DM \parallel BE$ și $CN \parallel AF$. e) Dovediți că trapezul $ABEF$ este isoscel atunci și numai atunci când paralelogramul $ABCD$ este dreptunghi.

84. Fie $ABCD$ un paralelogram și M mijlocul laturii $[AB]$. Dacă $[MC] \equiv [BD]$, iar perimetrul triunghiului AMD reprezintă jumătate din perimetrul paralelogramului $ABCD$, demonstrați că: a) triunghiul AMD este echilateral ; b) $BD \perp AD$.

85. Fie $ABCD$ un paralelogram. Se construiesc în exterior romburile $ABMN$, $BCPQ$, $CDST$ și $DAUV$ așa ca N, A, D, S să fie coliniare și U, A, B, Q să fie coliniare. Arătați că: a) Q, C, S sunt coliniare ; b) $BDTP$ este trapez isoscel ; c) $MQSV$ este paralelogram.

*

* *

Scanned with OKEN Scanner

CAP. IV. ◆ SEGMENTE PROPORȚIONALE ◆ ◆ ASEMĂNAREA TRIUNGHIURILOR ◆

1. Un segment $[AB]$ este împărțit în trei segmente de lungimi direct proporționale cu numerele 2, 3 și 4 de punctele M și N. Lungimea segmentului $[PQ]$, unde P este mijlocul segmentului $[AM]$ și Q mijlocul segmentului $[NB]$, este 5,4 cm. Calculați lungimea segmentului $[AB]$.

2. Fie $[AB]$ un segment cu $AB = 24$ și $M \in [AB]$ astfel încât $6AM = 5AB$. a) Calculați lungimea segmentului $[AM]$. b) Calculați valoarea raportului $\frac{MB}{AB}$. c) Dacă N este mijlocul segmentului $[AM]$ calculați valoarea raportului $\frac{NM}{MB}$.

3. Fie $[AB]$ un segment cu $AB = 6$ cm. Construiți $M \in [AB]$, astfel ca $3MA = MB$.

4. Fie A și B două puncte astfel încât $AB = 10$ cm. a) Arătați că există $M \in [AB]$, astfel ca $2MA = 3MB$. Construiți acest punct. b) Arătați că există un punct $N \in AB$, distinct de M, astfel încât $2NA = 3NB$. Construiți acest punct.

5. Se dă un segment $[AB]$ de lungime 36 cm și fie O mijlocul său. Construiți $M \in [AB]$ astfel încât $4MA = 5MB$. Construiți $N \in AB$, astfel încât $5NA = 4NB$ și verificați relațiile:

$$\text{a) } OB^2 = OM \cdot ON \; ; \quad \text{b) } \frac{2}{AB} = \frac{1}{AM} + \frac{1}{AN}.$$

6. Fie $[AB]$ un segment dat. Construiți punctul $C \in [AB]$, așa încât $7AC = 3AB$.

7. Se dă un segment $[MN]$. Construiți punctul $I \in [MN]$, astfel încât $8MI = 5MN$.

8. În triunghiul ABC avem $AB = 36$ cm, $BC = 52$ cm și D, E, F puncte pe latura $[AB]$, astfel încât $[AD] \equiv [DE] \equiv [EF] \equiv [FB]$. Fie $DD' \parallel EE' \parallel FF' \parallel BC$, unde D', E', F' sunt puncte pe $[AC]$. Dacă $E'F' = 8$ cm, calculați perimetrul triunghiului ABC.

9. În triunghiul ABC, M și N sunt mijloacele laturilor $[AB]$ și $[AC]$. O secantă oarecare dusă prin A intersectează MN în P și BC în Q. Demonstrați că: $[AP] \equiv [PQ]$.

10. În trapezul $ABCD$ $(AB \parallel CD)$, fie $[EF]$ linia mijlocie. O dreaptă oarecare d intersectează AB în P, EF în N și CD în M. Demonstrați că: $[MN] \equiv [NP]$.

11. Fie ABC un triunghi și d_1, d_2, d_3 trei drepte paralele cu BC. Pe d_1 se iau punctele M, N, P, Q în această ordine, astfel încât $[MN] \equiv [NP] \equiv [PQ]$. Prin M, N, P, Q ducem paralela la AB și notăm cu M', N', P', Q' intersecțiile acestora cu d_2, apoi prin M', N', P', Q' ducem paralela la AC și notăm cu M'', N'', P'', Q'' intersecțiile acestor paralele cu d_3. Demonstrați că $[M''N''] \equiv [N''P''] \equiv [P''Q'']$.

12. Fie $ABCD$ un trapez $(AB \parallel CD)$ și $E, F \in [AD]$, astfel încât $[AE] \equiv [EF] \equiv [FD]$. Paralelele prin E și F la baze intersectează $[CB]$ în G și H. Să se demonstreze că $EG + FH = AB + CD$.

13. Triunghiul ABC are lungimile laturilor $AB = 12$ cm, $AC = 16$ cm, $BC = 24$ cm. Pe $[AB]$ se consideră punctul M, astfel încât $AM = 3$ cm. Prin M se duc $MN \parallel BC$ și $MP \parallel AC$,

Scanned with OKEN Scanner

$N \in (AC)$, $P \in (BC)$, iar prin N se duce $NQ \| AB$, $Q \in (AB)$. Determinați lungimile segmentelor: $[BQ]$, $[QP]$, $[PC]$, $[MN]$, $[NQ]$, $[MP]$.

14. În triunghiul ABC, $M \in (AB)$, $N \in (AC)$, $MN \| BC$. Completați tabelul următor:

AB	AC	BC	AM	MB	AN	NC	MN
5	6	7	2				
	9		2	4			4
	16	32	9			10	
	5			1	4		3,2

15. Fie ABC un triunghi oarecare, M mijlocul laturii $[BC]$ și $P \in (AM)$. Paralela prin P la AB intersectează (BC) în D, iar paralela prin P la AC intersectează (BC) în E. a) Demonstrați că M este mijlocul segmentului $[DE]$. b) Demonstrați că dacă P este centrul de greutate al triunghiului ABC, atunci $BD = DE = EC$.

16. În triunghiul ABC, A', B', C' sunt mijloacele laturilor $[BC]$, $[AC]$, $[AB]$. Paralelele la AA' duse prin C' și B' taie $[BC]$ în C_1, respectiv B_1. a) Demonstrați că A' este mijlocul segmentului $[B_1C_1]$. b) Dacă $AA' \cap B'C' = \{M\}$, arătați că $B'M = MC'$.

17. O dreaptă paralelă cu mediana $[AM]$ a triunghiului ABC ($M \in (BC)$), taie respectiv în D, E, F pe (BC), (CA) și AB. Demonstrați că:

a) $\frac{AF}{AB} = \frac{AE}{CA}$, $\frac{DE}{AM} = \frac{DC}{CM}$, $\frac{DF}{AM} = \frac{DB}{BM}$; b) $DE + DF = 2 \cdot MA$.

18. Se dă paralelogramul $ABCD$ și paralelogramul $MNPQ$ înscris în $ABCD$ având $MN \| AC$ și $NP \| BD$. Demonstrați că: $\frac{MN}{AC} + \frac{NP}{BD} = 1$.

19. În triunghiul ABC fie $[AM]$ mediană ($M \in (BC)$), $PQ \| BC$, $P \in (AB)$, $Q \in (AC)$ și $\{N\} = PQ \cap AM$. Demonstrați că: $[PN] \equiv [NQ]$.

20. În triunghiul ABC, $P \in (AB)$, $Q \in (AC)$, $PQ \| BC$. Dacă O este mijlocul segmentului $[PQ]$, demonstrați că OA trece prin mijlocul laturii $[BC]$.

21. Fie $ABCD$ un trapez ($AD \| BC$), E mijlocul bazei $[BC]$ și M intersecția diagonalei $[AC]$ cu DE. Paralela prin M la baze intersectează AB, BD, CD respectiv în punctele P, N și Q. Demonstrați că $PN = NM = MQ$.

22. În trapezul $ABCD$, $AB \| CD$, fie $\{O\} = AC \cap BD$. O paralelă dusă prin O la baze intersectează AD în M și BC în N. Demonstrați că: $[MO] \equiv [ON]$.

23. Se dă un trapez oarecare $ABCD$ ($AD \| BC$, $AD < BC$). Fie $\{E\} = AB \cap CD$; paralela prin E la BC, intersectează pe AC și BD respectiv în M și N. Arătați că $[ME] \equiv [NE]$.

24. Demonstrați că mijloacele bazelor unui trapez, punctul de intersecție a diagonalelor sale și punctul de intersecție a laturilor neparalele sunt coliniare.

25. În patrulaterul convex $ABCD$ paralela prin B la AD intersectează AC în E, iar paralela prin A la BC intersectează BD în F. Să se demonstreze că $EF \| CD$.

26. În triunghiul ABC avem: $AB = 14$ cm, $AC = 21$ cm. Dacă $C' \in (AC)$ și $AC' = 6$ cm, $B' \in (AB)$ și $AB' = 4$ cm, demonstrați că $B'C' \| BC$.

27. În triunghiul ABC cu $AB = 5$ cm, $BC = 6$ cm, $AC = 7$ cm, se duce DE paralelă cu BC, $D \in (AB)$, $E \in (AC)$, astfel încât triunghiul ADE și trapezul $BDEC$ să aibă același perimetru. Să se calculeze DE.

28. Pe latura $(OX$ a unghiului $\sphericalangle XOY$ considerăm punctele A, B ($OB > OA$). Prin A și B ducem

Scanned with OKEN Scanner

două drepte paralele care intersectează pe (OY în C și respectiv în D. Unim B cu C și ducem prin D o paralelă la BC care intersectează (OX în E. Demonstrați că OB este media proporțională a lui OA și OE.

29. Fie ABC un triunghi dreptunghic în A și $AD \perp BC$, $D \in BC$. Pe (AD) și (DC) considerăm punctele P și Q. Demonstrați că dreptele BP și AQ sunt perpendiculare dacă și numai dacă $AP \cdot DC = AD \cdot QC$.

30. Prin vârful A al paralelogramului $ABCD$ se duce o secantă care intersectează diagonala $[BD]$ în E, iar laturile $[BC]$ și $[CD]$ în F și G. Arătați că $EA^2 = EF \cdot EG$.

31. Fie ABC un triunghi isoscel ($AB = AC$). O dreaptă perpendiculară pe BC intersectează (BC), (CA) și AB respectiv în D, E, F. Dacă M este mijlocul lui $[BC]$, demonstrați că:

a) $AE = AF$; b) $AE \cdot BC = 2AB \cdot DM$.

32. În triunghiul ABC fie M mijlocul laturii $[BC]$ și $N \in (AM)$; dreapta BN intersectează AC în Q, iar CN intersectează AB în P. Demonstrați că $PQ \parallel BC$.

33. În triunghiul ABC, $[AM]$ este mediană, $M \in (BC)$ și N este mijlocul segmentului $[AM]$. Dacă $\{P\} = BN \cap AC$, demonstrați că $2 \cdot AP = PC$.

34. Bisectoarele unghiurilor A și D ale paralelogramului $ABCD$ intersectează diagonalele (BD) și (AC) în M și respectiv N. Demonstrați că $MN \parallel AD$.

35. În triunghiul ABC cu $AB = 9$ cm, $AC = 6$ cm, fie bisectoarea $(AD$, $D \in (BC)$, a unghiului BAC și $BD = 6$ cm. Calculați BC.

36. În triunghiul ABC, fie $[AM]$ mediană, $M \in (BC)$. Notăm cu $(MP$, respectiv $(MQ$ bisectoarele unghiurilor AMB și AMC, $P \in (AB)$, $Q \in (AC)$. Demonstrați că $PQ \parallel BC$.

37. În triunghiul isoscel ABC, $AB = AC = b$ și $BC = a$, fie (BE bisectoarea unghiului ABC, $E \in (AC)$ și $EF \parallel BC$, $F \in (AB)$. Calculați lungimea segmentului $[EF]$.

38. Fie $ABCD$ un patrulater convex cu $AB \parallel DC$, $AC \cap BD = \{O\}$. Ducem $OM \parallel BC$, $M \in AB$ și $ON \parallel AD$, $N \in CD$. Dacă $OM \cdot AD = ON \cdot BC$, demonstrați că $ABCD$ este paralelogram.

39. Fie $ABCD$ un trapez isoscel cu $AB \parallel CD$, $AB > CD$. Notăm cu E proiecția lui D pe AB și cu M mijlocul segmentului $[BD]$. Demonstrați că $ME \parallel AC$.

40. Pe laturile $[AB]$ și $[AC]$ ale triunghiului ABC se consideră punctele M și N astfel încât $[BM] \equiv [CN]$. Demonstrați că dreapta determinată de mijloacele segmentelor $[MN]$ și $[BC]$ este paralelă cu bisectoarea unghiului BAC.

41. În triunghiul isoscel ABC ($[AB] \equiv [AC]$), mediatoarea laturii $[AB]$ intersectează BC în D. Bisectoarea unghiului ABC intersectează pe AD în E, iar bisectoarea unghiului DAC intersectează pe BC în F. Demonstrați că $EF \parallel AC$.

42. O secantă intersectează laturile unui unghi XOY de măsură $120°$ și bisectoarea lui respectiv în A, B, C. Să se demonstreze că $\frac{1}{OC} = \frac{1}{OB} + \frac{1}{OA}$.

43. În triunghiul ABC fie $D \in (AC)$, astfel încât $\sphericalangle BDC \equiv \sphericalangle ABC$. Știind că $AD = 7$ cm, $DC = 9$ cm, determinați BC și $\frac{BD}{BA}$.

44. În triunghiul ABC fie $D \in (AC)$, astfel încât $\sphericalangle ABD \equiv \sphericalangle ACB$. Să se determine AD, știind că $AB = 2$ cm și $AC = 4$ cm.

45. Fie triunghiul ABC cu $m(\sphericalangle A) = 90°$ și $AD \perp BC$, $D \in (BC)$. Să se demonstreze relația:

Scanned with OKEN Scanner

$$AD \cdot BC = AB \cdot AC.$$

46. În triunghiul ABC fie H ortocentrul său și A', B', C' picioarele înălțimilor. Să se demonstreze relația $HA \cdot HA' = HB \cdot HB' = HC \cdot HC'$.

47. Demonstrați că un triunghi este asemenea cu triunghiul determinat de mijloacele laturilor sale.

48. În triunghiurile oarecare ABC și $A'B'C'$, $AD \perp BC$, $A'D' \perp B'C'$, $D \in (BC)$, $D' \in (B'C')$. Dacă $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{AD}{A'D'}$, demonstrați că $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$.

49. Fie ABC un triunghi cu $m(\sphericalangle A) = 90°$, D mijlocul lui $[BC]$, $DM \perp BC$, $M \in (AB)$ și $\{N\} = DM \cap AC$. Calculați BC, știind că $DM = 3$ cm și $MN = 9$ cm.

50. În triunghiul ABC, $m(\sphericalangle B) = 130°$, $m(\sphericalangle C) = 37°$, iar în triunghiul DEF, $m(\sphericalangle D) = 13°$ și $m(\sphericalangle E) = 130°$. Sunt triunghiurile ABC și DEF asemenea ?

51. În triunghiul ABC se înscrie un romb $ADEF$ cu vârfurile D, E, F respectiv pe laturile (AB), (BC), (CA). Determinați BE, dacă $AB = 14$ cm, $BC = 12$ cm și $AC = 10$ cm.

52. În triunghiul ascuțitunghic ABC fie A', B' picioarele înălțimilor din A și B și $D \in BC$, astfel încât $B'A \cdot AC = A'D \cdot BC$. Demonstrați că $\sphericalangle BAC \equiv \sphericalangle ADC$.

53. În triunghiurile ABC și $A'B'C'$ avem $BE \perp AC$, $E \in AC$, $B'E' \perp A'C'$, $E' \in A'C'$, $CF \perp AB$, $F \in AB$, $C'F' \perp A'B'$, $F' \in A'B'$. Dacă $\frac{BC}{B'C'} = \frac{BE}{B'E'} = \frac{CF}{C'F'}$ să se demonstreze că $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$.

54. În patrulaterul convex $ABCD$, diagonala AC este bisectoarea unghiului $\sphericalangle BCD$, iar $\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle CAD$. Demonstrați că $AC^2 = BC \cdot CD$.

55. Fie ABC un triunghi cu $m(\sphericalangle A) = 90°$ și $AD \perp BC$, $D \in BC$. Notăm cu E și F proiecțiile punctului D pe AB, respectiv AC. Demonstrați că $AE \cdot AB = AC \cdot AF$.

56. Fie $ABCD$ un trapez dreptunghic cu $m(\sphericalangle A) = m(\sphericalangle B) = 90°$ și O intersecția diagonalelor. Paralela prin O la BC intersectează AB în E. Să se demonstreze că $(EO$ este bisectoarea unghiului DEC.

57. Fie triunghiul isoscel ABC, $AB = AC$ și $D \in (BC)$. Se proiectează D pe AC în E și E pe AB în F. Să se arate că $AB \cdot CD \cdot EF = BC \cdot DE \cdot AE$.

58. În triunghiul ABC, $m(\sphericalangle B) = 45°$, $m(\sphericalangle C) = 75°$. Fie D, $E \in (BC)$ astfel încât $m(\sphericalangle BAD) = m(\sphericalangle CAE) = 15°$. Să se arate că: a) $\Delta ADC \sim \Delta BAC$; b) $2 \cdot DE \cdot BC = AB \cdot AC$.

59. Dacă un triunghi dreptunghic are ipotenuza și o catetă proporționale cu ipotenuza și o catetă ale altui triunghi dreptunghic, să se demonstreze că triunghiurile sunt asemenea.

60. În triunghiul ABC fie $D \in (BC)$, astfel încât: $\Delta ABC \sim \Delta DBA \sim \Delta DAC$. Demonstrați că $m(\sphericalangle A) = 90°$.

61. Demonstrați că dacă două triunghiuri dreptunghice au ipotenuzele și înălțimile corespunzătoare ipotenuzelor proporționale, atunci ele sunt asemenea.

62. Pe latura $[AD]$ a paralelogramului $ABCD$ fie punctul P, cu $n \cdot AP = AD$, unde $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 2$. Dacă $BP \cap AC = \{Q\}$, arătați că $(n+1) \cdot AQ = AC$.

*

* *

Scanned with OKEN Scanner

CAP. V. • RELAȚII METRICE •

1. Fie dreptunghiul $ABCD$, $BE \perp AC$, $DF \perp AC$ $(E, F \in AC)$. Știind că $AB = 40$ cm și $BC = 30$ cm, calculați lungimea segmentului $[EF]$.
2. Calculați perimetrul unui pătrat, cunoscând că diagonala are lungimea 48 cm.
3. În triunghiul dreptunghic ABC ($m(\sphericalangle A) = 90°$), fie $AD \perp BC$ $(D \in BC)$. Dacă $DB = 6{,}4$ cm și $CD = 3{,}6$ cm, calculați lungimile segmentelor $[AC]$, $[BC]$, $[BA]$, $[AD]$.
4. Se consideră dreptunghiul $ABCD$ cu $m(\sphericalangle AOB) = 120°$ și $AC = 8$ cm. Calculați lungimile laturilor dreptunghiului.
5. Fie paralelogramul $ABCD$ cu $AD = a$, $AB = 2a$ și $m(\sphericalangle D) = 60°$. Calculați lungimile diagonalelor.
6. Fie triunghiul ABC, $AD \perp BC$, $D \in (BC)$. Arătați că: $AB^2 - AC^2 = BC(BD - DC)$.
7. Un triunghi dreptunghic are o catetă de lungime 6 cm și înălțimea corespunzătoare ipotenuzei de lungime 4,8 cm. Calculați lungimile medianelor.
8. Fie triunghiul dreptunghic ABC ($m(\sphericalangle A) = 90°$), $AB = 6$ cm și $AC = 8$ cm. Calculați lungimile bisectoarelor $[CD]$ și $[BE]$, unde $D \in (AB)$, $E \in (AC)$.
9. Un triunghi dreptunghic are lungimile catetelor a și $a\sqrt{3}$. Calculați lungimile bisectoarelor unghiurilor triunghiului.
10. Fie triunghiul dreptunghic ABC ($m(\sphericalangle A) = 90°$), D mijlocul lui $[BC]$, $DE \perp BC$, $E \in (AB)$. Știind că $AB = 12$ cm și $AC = 6$ cm, calculați lungimea lui $[CE]$.
11. Fie triunghiul dreptunghic ABC ($m(\sphericalangle A) = 90°$), $AD \perp BC$ și O mijlocul lui $[BC]$. Cunoscând $BC = 50$ cm și $OD = 7$ cm, calculați AB și AC.
12. Se dă triunghiul dreptunghic ABC ($m(\sphericalangle A) = 90°$), O mijlocul lui $[BC]$ și $AD \perp BC$. Dacă $AD = \sqrt{3}$ cm și $m(\sphericalangle AOD) = 60°$, calculați AB, AC, BC.
13. Se dă trapezul isoscel $ABCD$ $(AB \parallel CD)$, $AC \perp BC$, M și N mijloacele segmentelor $[AC]$ și $[BD]$. Cunoscând $BC = 15$ cm și $MN = 6$ cm, calculați perimetrul trapezului.
14. În triunghiul ABC avem $AB = 5$ cm, $AC = 10$ cm și $BC = 5\sqrt{3}$ cm. Verificați dacă triunghiul este dreptunghic.
15. Fie $ABCD$ un trapez isoscel $(AB \parallel CD)$, în care $AB = 2$ cm, $AD \cap BC = \{M\}$, $AA' \perp DC$ și $2AA' = CD - AB$. Calculați lungimea lui $[MB]$.
16. În triunghiul ABC se dau $AB = 4$ cm, $AC = 5$ cm și $BC = 7$ cm. Dacă $BD \perp AC$ și $D \in AC$, stabiliți poziția punctelor A, C și D.
17. Se consideră triunghiul isoscel ABC cu $[AB] \equiv [AC]$ și D un punct pe prelungirea medianei $[AM]$, $M \in (BC)$. Dacă $DB^2 = DM \cdot AD$, arătați că $DC \perp AC$.
18. În triunghiul ABC, $[AA']$ și $[BB']$ sunt mediane $(A' \in (BC), B' \in (AC))$. Dacă $AA' = 6$ cm, $BB' = 9$ cm și $AC = 10$ cm, calculați lungimea segmentului $[AB]$.
19. Fie un pătrat de latură 2 cm. Care e numărul minim de puncte din interiorul pătratului astfel ca să existe două puncte cu distanța dintre ele mai mică sau egală cu $\sqrt{2}$ cm ?

Scanned with OKEN Scanner

20. Fie $ABCD$ un pătrat de latură a și o dreaptă variabilă ce trece prin A și intersectează dreptele CB și CD respectiv în E, F și nu are puncte comune cu interiorul pătratului. Calculați lungimea minimă a segmentului $[EF]$.

21. În triunghiul ABC ($m(\sphericalangle A) = 90°$), avem $\cos C = \frac{\sqrt{5}}{3}$. Arătați că: $m(\sphericalangle E) > 30°$.

22. Se consideră trapezul dreptunghic $ABCD$, cu $m(\sphericalangle A) = 90°$, $AB \| CD$, M mijlocul lui (BC) și $AM \perp BC$. Cunoscând $AB = a$ și $BC = 2b\left(a > b\sqrt{2}\right)$, calculați lungimile segmentelor $[DC]$ și $[AD]$.

23. Fie patrulaterul $ABCD$ cu $AC \perp BD$, $AD = 5$ și $BC = 12$. Calculați: $\sqrt{AB^2 + DC^2}$.

24. Arătați că triunghiul cu laturile de lungimi $\sqrt{3} - 1$, $\sqrt{3} + 1$ și $2\sqrt{2}$ este dreptunghic.

25. Triunghiul ABC are lungimile laturilor $AB = 16$ cm și $AC = 12$ cm. Calculați lungimea laturii $[BC]$ astfel ca triunghiul să fie dreptunghic.

26. Fie triunghiul ABC cu $m(\sphericalangle A) = 90°$, $AD \perp BC$, $D \in (BC)$. Să se arate că:

$$\frac{1}{AD^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2}$$

27. Triunghiul isoscel ABC are $AB = AC = 8$ cm și $m(\sphericalangle A) = 120°$. Calculați lungimea înălțimii corespunzătoare laturii $[AC]$.

28. Fie triunghiul isoscel ABC cu $AB = AC = 10$ cm și $BC = 8$ cm. Dacă $AD \perp AB$ ($D \in BC$), calculați perimetrul triunghiului ACD.

29. În triunghiul dreptunghic ABC cu catetele $AB = 4$ cm și $AC = 2\sqrt{2}$ cm, fie G centrul de greutate. Calculați $GA \cdot GB \cdot GC$.

30. Într-un triunghi ABC se cunosc $AB = 15$ cm, $AC = 12$ cm și $BC = 10$ cm. Să se calculeze:

$$\frac{\sin A}{\sin B} + \frac{\sin B}{\sin C} + \frac{\sin C}{\sin A}.$$

31. Triunghiul dreptunghic ABC are un unghi ascuțit de măsură $30°$ și perimetrul egal cu $18 + 18\sqrt{3}$ cm. Calculați lungimile laturilor triunghiului.

32. Fie triunghiul ABC în care $AB = \frac{AC}{2}$, $m(\sphericalangle A) = 60°$ și $BC = 3\sqrt{3}$ cm. Calculați lungimile segmentelor $[AB]$, $[AC]$, $[AD]$, D fiind piciorul înălțimii din B.

33. Fie triunghiul ABC dreptunghic în A și $AD \perp BC$, $D \in (BC)$. Arătați că:

$$AD = BC \cdot \sin B \cdot \sin C.$$

34. Să se determine măsurile unghiurilor triunghiului ale cărui lungimi ale laturilor satisfac relația: $\sqrt{a - 10} + b^2 - 10b + \left|c - 5\sqrt{3}\right| = -25$.

35. Fie rombul $ABCD$ cu $AB = 20$ cm, $AC = 32$ cm. Pe prelungirea lui $[AC]$ se ia punctul E așa încât $CE = 12$ cm. Dacă $AF \perp DC$, $EG \perp DC$, calculați FG, unde F, $G \in DC$.

36. Fie triunghiul ABC cu $AB = 6$ cm, $BC = 15$ cm, $D \in (BC)$, $DA = DB = 5$ cm. Calculați lungimea lui $[AC]$.

37. Se dă trapezul isoscel $ABCD$, $[AB]$ baza mare, M mijlocul lui $[AD]$, N mijlocul lui $[BC]$, $MN \cap AC = \{P\}$, $MN \cap BD = \{Q\}$ și $AC \cap DB = \{O\}$. Dacă $MP = 2$ cm, $PQ = 3$ cm și $AD = 5$ cm, calculați: a) AC; b) perimetrul triunghiului OAB.

Scanned with OKEN Scanner

38. În trapezul $ABCD$ ($AB \parallel CD$) se cunosc $AB = 9$ cm, $BC = \sqrt{2}$ cm, $CD = 8$ cm și $AD = 2$ cm. Calculați lungimile diagonalelor.

39. În triunghiul ABC se cunosc $BC = 6\sqrt{2}$ cm, $AC = 2\sqrt{10}$ cm și $m(\sphericalangle B) = 45°$. Calculați lungimea laturii $[AB]$.

40. În triunghiul ABC se cunosc $AC = 9$ cm, $BC = 10$ cm și $m(\sphericalangle B) = 60°$. Calculați lungimea segmentului $[AB]$.

41. Pe latura $[DC]$ a pătratului $ABCD$ se construiește în exterior triunghiului echilateral EDC. Știind că $AB = a$, calculați: a) lungimea lui $[AE]$; b) funcțiile trigonometrice ale unghiurilor de 15° și 75°.

42. Fie pătratul $ABCD$ și triunghiul echilateral EAB cu lungimea laturii a, așa încât E să fie în interiorul pătratului. Calculați perimetrul triunghiului EDC.

43. În interiorul triunghiului $ABCD$ cu lungimea laturii a, se construiesc triunghiurile isoscele MAB, NBC, PDC și QAD de baze laturile pătratului și unghiurile de la bază de măsură 15°. Arătați că $MNPQ$ este un pătrat și calculați lungimea laturii lui în funcție de a.

44. Fie pătratul $ABCD$, $E \in (DC)$, $\frac{DE}{DC} = \frac{1}{3}$ și $AF \perp BE$. Cunoscând că lungimea laturii pătratului este 6 cm, calculați lungimea segmentului $[DF]$.

45. Fie trapezul $ABCD$ cu baza mică $[AB]$. Cunoscând $AB = 30$ cm, $AD = 30$ cm, $BC = 26$ cm și înălțimea $AA' = 24$ cm, calculați lungimea segmentului $[CD]$.

46. Fie dreptunghiul $ABCD$, $AM \perp DB$, $MN \perp DC$ și $MP \perp BC$. Știind că $AB = 8$ cm și $AD = 6$ cm, calculați lungimile segmentelor $[NC]$ și $[PC]$.

47. În triunghiul dreptunghic ABC ($m(\sphericalangle A) = 90°$), D este piciorul înălțimii, iar E, F proiecțiile lui D respectiv pe catetele $[AB]$, $[AC]$. Demonstrați că $\frac{BE}{CF} = \left(\frac{AB}{AC}\right)^3$.

48. Fie triunghiul ABC de laturi a, b, c și h_a înălțimea din A. Știind că $m(\sphericalangle A) = 45°$, arătați că $2ah_a = bc\sqrt{2}$.

49. Fie triunghiul ABC cu $m(\sphericalangle A) = 60°$. Arătați că: $2ah_a = bc\sqrt{3}$.

50. Fie triunghiul ABC cu $m(\sphericalangle A) = 30°$. Arătați că: $2ah_a = bc$.

51. Demonstrați că dacă într-un triunghi ABC, medianele duse din vârfurile B și C sunt perpendiculare, atunci există relația: $5BC^2 = AB^2 + AC^2$.

52. Fie triunghiul dreptunghic ABC ($m(\sphericalangle A) = 90°$) și M intersecția bisectoarei (CE cu înălțimea AD, $D \in BC$. Dacă $AB = 40$ cm și $AM = 15$ cm, calculați MD.

53. Fie pătratul $ABCD$, M mijlocul lui $[AB]$, N mijlocul lui $[BC]$ și $\{P\} = DN \cap CM$. Dacă $AB = 6\sqrt{5}$ cm, calculați: a) DM; b) $MP^2 + DP^2$.

54. Fie triunghiul dreptunghic ABC ($m(\sphericalangle A) = 90°$) și $AD \perp BC$ ($D \in (BC)$).

a) Dacă $AB = 3$ cm și $\operatorname{tg} B = \sqrt{3}$, calculați: BC, AD, BD, CD;

b) Dacă $AB = 10$ cm și $\cos BAD = \frac{\sqrt{3}}{2}$, calculați: AC, BC, AD, BD, CD;

c) Dacă $BC = 10\sqrt{2}$ și $m(\sphericalangle B) = 45°$, calculați: AB și AC;

d) Dacă $BC = 8\sqrt{3}$ și $\sin \sphericalangle B = \frac{\sqrt{6}}{3}$, calculați: AB, AC și AD;

Scanned with OKEN Scanner

c) Dacă $BC = 6$ și $\cos CAD = \frac{2}{3}$, calculați: AB, AC și $\operatorname{ctg} BAD$.

55. Fie triunghiul ascuțitunghic ABC. Știind că $\sin A = \frac{1}{3}$, calculați: $\cos A$, $\operatorname{tg} A$, $\operatorname{ctg} A$.

56. Se dă triunghiul isoscel ABC cu $AB = AC = 3$ cm și $\cos B = \frac{3}{5}$. Calculați perimetrul triunghiului și înălțimea BB'.

57. În trapezul isoscel $ABCD$ ($AB \parallel CD$) se cunosc: $AB = AD = a$ și $m(\sphericalangle BAC = 30°)$. Calculați perimetrul și diagonalele trapezului.

58. În paralelogramul $ABCD$ se cunosc $AB = 12$ cm, $BC = 8$ cm și $m(\sphericalangle A) = 60°$. Calculați lungimile diagonalelor.

59. Calculați măsurile unghiurilor unui romb știind că lungimile diagonalelor sale sunt a și $a\sqrt{3}$ cm.

60. Un triunghi isoscel ABC, are $AB = AC = a$ și $m(\sphericalangle A) = 30°$. Calculați lungimile înălțimilor și a laturii BC.

61. Fie trapezul dreptunghic $ABCD$ cu $AB \parallel DC$ și $m(\sphericalangle A) = 90°$. Dacă $AB = AD = 2a$ și $CD = a$, calculați $\cos B$.

62. Trapezul dreptunghic $ABCD$ cu $AB \parallel CD$, $m(\sphericalangle A) = 90°$ are $AB = 12$ cm, $CD = 9$ cm și $\sin B = \frac{4}{5}$. Calculați perimetrul și diagonalele trapezului.

63. În trapezul $ABCD$ se știe că: $AB \parallel DC$, $m(\sphericalangle B) = 60°$, $m(\sphericalangle A) = 45°$, $m(\sphericalangle D) > 90°$, $m(\sphericalangle C) > 90°$, $CD = 6$ cm și $AD = 5\sqrt{2}$ cm. Calculați lungimea laturii BC.

64. În triunghiul ABC se știe că $AB = a$, $m(\sphericalangle B) = 30°$ și $m(\sphericalangle C) = 45°$. Calculați perimetrul triunghiului.

65. În triunghil ABC se cunosc: $m(\sphericalangle A) = 120°$, $AB = 2a$ și $AC = a$. Calculați lungimea lui BC.

66. Fie triunghiul dreptunghic ABC ($m(\sphericalangle A) = 90°$), $AD \perp BC$, ($D \in BC$), (AE bisectoarea unghiului A ($E \in BC$) și M mijlocul lui (BC). Știind că $AB = 30$ cm și $AC = 40$ cm, calculați $\operatorname{tg} EAM$.

67. Fie triunghiul ABC cu $AB = 3\sqrt{5}$ cm, $BC = 10$ cm și $AC = 5\sqrt{3}$ cm. Calculați valorile funcțiilor trigonometrice ale unghiului B.

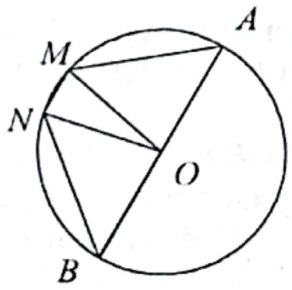
68. În triunghiul ABC se știe că $m(\sphericalangle A) = 45°$ și $m(\sphericalangle C) = 30°$. Dacă M este mijlocul lui BC calculați $\operatorname{tg} MAC$.

*
* *

Scanned with OKEN Scanner

CAP. VI. • CERCUL •

1. Fie $C(O; 2,5)$, $A, B \in C(O)$, $[AD]$ diametru, E punctul diametrului opus punctului B, triplul măsurii $\sphericalangle BOD$ este dublul măsurii $\sphericalangle EOD$. Calculați AD, BE, $m(\sphericalangle AOB)$, $m(\sphericalangle AOE)$.
2. Pe cercul $C(O)$ se dau punctele A, B, C astfel ca $m(\overset{\frown}{AB}) = 70°$ și $m(\overset{\frown}{BC}) = 130°$. Aflați măsurile unghiurilor AOB, BOC, COA, ABC, BCA și CAB.
3. Pe cercul $C(O, 6)$ sunt situate punctele A, B, C, D în această ordine astfel încât $m(\sphericalangle AOD) = 150°$, $m(\sphericalangle COD) = 30°$, $CO \perp BO$. Calculați A_{ABCD}.
4. Pe un cerc se iau punctele A, B, C, D astfel ca $m(\overset{\frown}{AB}) = 36°15'$, $m(\overset{\frown}{BC}) = 18°10'$, $m(\overset{\frown}{CD}) = 25°20'$. Aflați măsurile unghiurilor AOB, BOC, COD, ABC, BCD, ACD, BDA, CAB.
5. Împărțiți un cerc în patru arce astfel ca măsurile lor să fie direct proporționale cu numerele 1, 4, 8, 11.
6. Pe un cerc de centru O și raza de 1,58 cm, se consideră un arc AB de măsură 30°. Să se determine distanța de la punctul A la dreapta OB.
7. Fie A și B două puncte ale unui cerc și C un punct pe arcul mare AB. Fie D un punct situat pe dreapta AC astfel încât C este situat între punctele A și D, iar segmentele $[BC]$ și $[CD]$ sunt congruente. Știind că arcul mic AB are măsura de 60°, se cere: a) Să se calculeze măsura unghiului $\sphericalangle CBD$; b) Să se calculeze măsurile unghiurilor triunghiului ABC dacă tangenta în punctul C la cerc este perpendiculară pe BD.
8. Punctele A și B din figură sunt diametral opuse, iar $m(\overset{\frown}{AN}) = 102°$ și $m(\overset{\frown}{MN}) = 24°$. Să se demonstreze că: a) $[MA] \equiv [NB]$; b) $MN \parallel AB$; c) $[AN] \equiv [BM]$.



9. Câte arce și câte coarde există pe un cerc, cu capetele în n puncte ale acestui cerc, luate două câte două?
10. Se dă triunghiul ABC, înscris într-un cerc, având $m(\sphericalangle A) = 60°$. Bisectoarea unghiului A intersectează cercul în punctul M. Punctele P și N sunt mijloacele arcelor AB respectiv AC, iar $\{E\} = MN \cap AC$ și $\{F\} = MP \cap AB$. a) Să se afle $m(\sphericalangle PMN)$; b) Ce fel de triunghi este ABC dacă patrulaterul $AEMF$ este paralelogram?
11. Într-un cerc se construiesc coarda $[AB]$ și diametrul $[AC]$. Fie coarda $[BD] \perp [AC]$ și $DE \perp AB$, $E \in AB$. Să se arate că $d(B, AD) = DE$.
12. În triunghiul ABC ($m(\sphericalangle A) = 90°$), bisectoarea unghiului B intersectează mediatoarea laturii $[AC]$ în D. Calculați măsura unghiului BDC.
13. Pe diametrul unui cerc luat drept latură, este construit un triunghi echilateral. Determinați măsurile arcelor în care laturile triunghiului taie semicercul.

Scanned with OKEN Scanner

14. Înălțimile din B și C ale triunghiului ascuțitunghic ABC se taie în H și taie cercul circumscris triunghiului în D și E. Demonstrați că $(DC) \equiv (CH)$ și $(BH) \equiv (BE)$.

15. Două cercuri $C(O_1, R_1)$ și $C(O_2, R_2)$ se intersectează în A și B. Tangenta în A la $C(O_1, R_1)$ intersectează $C(O_2, R_2)$ în C. Dreapta CB intersectează $C(O_1, R_1)$ în D și dreapta DA intersectează $C(O_2, R_2)$ în E. a) Să se arate că $[CE] \equiv [CA]$; b) Să se precizeze poziția dreptei CE față de cercul circumscris triunghiului DBE.

16. În triunghiul ABC înscris într-un cerc, se duce diametrul $[AA']$ și înălțimea AT (A' și T aparțin cercului). Dacă $AA' \cap BC = \{P\}$, $OT \cap BC = \{Q\}$, arătați că:

a) OPQ este triunghi isoscel ; b) $(BP) \equiv (QC)$.

17. Fie $[AB]$ un diametru al unui cerc și M un punct în interiorul cercului. Dreptele AM și BM intersectează cercul în C și D, iar BC și AD se intersectează în E. Dacă EM intersectează pe AB în F și cercul în P și Q, arătați că F este mijlocul lui $[PQ]$.

18. Fie triunghiul ABC și H ortocentrul său. Să se arate că cercurile circumscrise triunghiurilor ABC și BHC au aceiași rază.

19. Fie ABC un triunghi isoscel ($(AB) \equiv (AC)$) ; cercul de diametru $[AC]$ taie înălțimea $[BB']$ în E. Prelungim segmentul (AE) cu $(EF) \equiv (EC)$. Demonstrați că triunghiul BCF este isoscel.

20. Din punctul T se duc tangentele $[TA]$ și $[TB]$ la un cerc de centru O. Pe TA și TB ca diametre și în exteriorul unghiului $\sphericalangle ATB$ se construiesc două semicercuri C_1 și C_2, care intersectează un cerc oarecare de centru T, în P respectiv Q. Să se arate că $APQB$ este trapez isoscel.

21. Bisectoarele triunghiului ABC intersectează cercul circumscris triunghiului, în punctele A', B', C'. Demonstrați că ortocentrul triunghiului $A'B'C'$ coincide cu centrul cercului înscris triunghiului ABC.

22. Fie ABC un triunghi cu toate unghiurile ascuțite, O centrul cercului circusmscris și H ortocentrul triunghiului ABC. Presupunând că bisectoarea unghiului $\sphericalangle A$ este perpendiculară pe OH, să se arate că $m(\sphericalangle BAC) = 60°$.

23. Fie M un punct în interiorul unui cerc de centru O și $[AB]$ o coardă care trece prin M. Notăm cu N simetricul lui M față de A, cu P simetricul lui M față de B, iar cu Q mijlocul lui (NP). Demonstrați că triunghiul OMQ este isoscel.

24. Fie ABC un triunghi înscris într-un cerc. Să se arate că tangenta la cerc în A împarte latura opusă $[BC]$ în segmente proporționale cu pătratele laturilor $[AB]$ și $[AC]$.

25. Fie ABC un triunghi. Tangentele în B și C la cercul său circumscris se taie în A_1, tangentele în A și C se taie în B_1, iar tangentele în A și B se taie în C_1. Demonstrați că dacă $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$, atunci triunghiul ABC este echilateral.

26. Triunghiul ABC este înscris în cerc. Bisectoarea $[AD$ taie cercul în M, $D \in (BC)$. Tangenta în M la cerc taie dreapta AB în E. a) Dacă $m(\sphericalangle AEM) = 30°$ și $m(\overset{\frown}{MC}) = 50°$, să se afle măsurile unghiurilor triunghiului. b) Dacă $DC = 4$ cm, $AB = 9$ cm și perimetrul triunghiului este 25 cm, să se afle lungimile laturilor triunghiului.

27. Dintr-un punct A exterior unui cerc de centru O se duc tangentele $[AM]$ și $[AN]$ la cerc (M și N aparțin cercului). Știind că $AO = 2\,MN$, aflați măsura unghiului MAN.

28. Fie cercurile $C(O', R_1)$ și $C(O'', R_2)$ astfel ca $O'' \in C(O', R_1)$. Tangenta într-un punct M variabil pe $C(O'', R_2)$ intersectează $C(O', R_1)$ în punctele P și Q. Arătați că $O''P \cdot O''Q$ = constant.

Scanned with OKEN Scanner

29. Fie un triunghi ABC. Perpendiculara în C pe BC intersectează AB în M, iar perpendiculara în A pe AB intersectează BC în N. Perpendiculara în M pe AB și perpendiculara în N pe BC se intersectează în P. Să se arate că $BP \perp AC$.

30. Fie un triunghi ABC și B_1, C_1 picioarele înălțimilor din B, respectiv C. Bisectoarea unghiului $\sphericalangle ABC$ intersectează bisectoarea unghiului $\sphericalangle AB_1C_1$ în M, iar bisectoarea unghiului $\sphericalangle ACB$ intersectează bisectoarea unghiului $\sphericalangle AC_1B_1$ în N. Să se arate că punctele B, C, M și N sunt conciclice.

31. Fie $[AB]$ un diametru al unui cerc. Pe tangenta în A la cerc se iau, de o parte și de alta a lui A, punctele M și N. Dreptele BM și BN taie cercul în P și Q. Demonstrați că:

$$BP \cdot BM = BQ \cdot BN.$$

32. Mediatoarele laturilor triunghiului ABC se intersectează cu bisectoarele corespunzătoare unghiurilor opuse laturilor, în punctele M, N, P. Să se arate că punctele M, N, A și P sunt conciclice.

33. În triunghiul ABC ascuțitunghic, notăm cu H intersecția înălțimilor $[AA']$ și $[CC']$. Cercul circumscris triunghiului AHC intersectează a doua oară pe AB în P. Construim $C'M \parallel BC$ și $PN \parallel BC$, $M, N \in AC$. Demonstrați că $[CM] \equiv [MN]$.

34. Fie $ABCD$ un patrulater inscriptibil, $CC_1 \parallel AB\ (C_1 \in AD)$ și $BB_1 \parallel CD\ (B_1 \in AD)$. Arătați că punctele B, B_1, C, C_1 sunt conciclice.

35. Prin punctul fix A din interiorul unui cerc se duc două coarde variabile, perpendiculare una pe alta. Arătați că segmentul ce unește mijloacele lor are lungime constantă.

36. Într-un dreptunghi $ABCD\ (AB > BC)$, fie E și F punctele de tangență cu diagonala $[AC]$ ale cercurilor înscrise în triunghiurile ABC și ACD. Să se calculeze lungimea segmentului $[EF]$ în funcție de $AB = a$ și $BC = b$.

37. Fie patrulaterul $ABCD$ inscriptibil. Perpendicularele duse în D și A pe AD și în C și B pe BC se intersectează respectiv în I și I'. Dreptele AD și BC se intersectează în E. Să se arate că:

a) $EI \perp AB$; b) $m(\sphericalangle AEI) = m(\sphericalangle BEI)$.

38. Două cercuri de centre O și O' au razele $r = x + 2$ și $r' = 1 - 2x$ și distanța dintre centre $OO' = 4$. a) Să se determine x astfel încât cele două cercuri să fie tangente interior.

b) Pentru ce valori ale lui x cercurile sunt secante?

39. Fie H, O, M și N respectiv ortocentrul unui triunghi ABC, centrul cercului său circumscris, mijlocul laturii $[BC]$ și mijlocul laturii $[AC]$. Dacă $\{E\} = AO \cap HM$ și $\{F\} = BO \cap HN$, să se arate că patrulaterul $ABEF$ este inscriptibil.

40. Fie triunghiul ABC înscris în cercul cu centrul în O, $AB > AC$, $m(\sphericalangle C) \neq 90°$, A' punctul diametral opus lui A și $M \in \overset{\frown}{BAC}$ astfel ca $m(\overset{\frown}{BM}) = m(\overset{\frown}{MC})$. Dacă tangenta în A' la cerc intersectează dreptele AB și AC în E și respectiv F, să se arate că: a) patrulaterul $EFCB$ este inscriptibil; b) $m(\sphericalangle AOM) = m(\sphericalangle AEF) - m(\sphericalangle ABC)$.

41. Un punct P de pe cercul circumscris triunghiului ABC, se proiectează pe BC, CA, AB în L, M, N. Să se arate că $PA \cdot PL = PB \cdot PM = PC \cdot PN$.

42. Două cercuri $C(O_1, r_1)$ și $C(O_2, r_2)$ sunt tangente exterior în T, iar T_1 și T_2 sunt punctele de tangență ale unei tangente comune exterioare cu cele două cercuri. a) Dacă $T_1O_2 \cap T_2O_1 = \{P\}$, demonstrați că $PT \parallel T_1O_1$. b) Notând cu d distanța de la T la T_1T_2, demonstrați că $\frac{2}{d} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}$.

43. Fie P un punct situat pe arcul mic BC al cercului circumscris triunghiului echilateral ABC și

Scanned with OKEN Scanner

$\{Q\} = AP \cap BC$. Demonstrați că $\frac{1}{PQ} = \frac{1}{BP} + \frac{1}{PC}$.

44. Mediana $[CD]$ a unui triunghi ABC în care $AC > BC$, este tangentă cercurilor înscrise în triunghiul ACD și triunghiul BCD în E și F. Să se arate că $2 \cdot EF = AC - BC$.

45. Fie un cerc cu diametrul $[AB]$. În A se duce tangenta la cerc și pe ea se iau M și N, de o parte și de alta a lui A, iar MB și NB taie cercul în P, respectiv Q. Arătați că: a) patrulaterul $MNQP$ este inscriptibil ; b) $MP \cdot MB - NQ \cdot NB = MB^2 - NB^2$.

46. Pe segmentul $[AB]$ cu $AB = 4a$, luăm segmentele de lungimi $AO_1 = O_1C = CO_2 = O_2B = a$. Se consideră cercurile cu centrele în O_1 și O_2 de raze a și cercul cu centrul în C de rază $2a$. Din A ducem o tangentă la cercul cu centrul în O_2, punctul de tangență fiind T. Această tangentă taie cercurile cu centrele în O_1 și C respectiv în R și S. a) Să se arate că $RT = TS = \frac{1}{2}AR$. b) Perpendicularele în B și C pe AB taie dreapta AT în P respectiv Q. Să se arate că $PT = 2 \cdot QT$.

47. Se dau cercurile $C(O_1)$ și $C(O_2)$, centrul O_2 fiind situat pe cercul $C(O_1)$. Pe cercul $C(O_1)$ se ia un punct oarecare P și din P se duce tangenta $[PT]$ la cercul $C(O_2)$. Să se arate că $PT^2 = PA \cdot PB$.

48. Dacă trei cercuri sunt tangente unei aceleiași drepte și sunt tangente între ele, două câte două, atunci există relația $\frac{1}{\sqrt{R_1}} + \frac{1}{\sqrt{R_3}} = \frac{1}{\sqrt{R_2}}$, R_1, R_2, R_3 fiind razele celor trei cercuri și $R_2 < R_1$, $R_2 < R_3$.

49. Fie un cerc cu centrul în O înscris în triunghiul ascuțitunghic ABC, tangent la laturile $[BC]$, $[AC]$, $[AB]$ respectiv în punctele A_1, B_1, C_1. Paralela prin A la BC taie A_1C_1 și A_1B_1 respectiv în P și Q. Demonstrați că A_1O, PB_1 și QC_1 sunt concurente și precizați poziția punctului de concurență față de cerc.

50. Fie ABC un triunghi echilateral și punctul E situat pe arcul BC al cercului circumscris triunghiului. Notăm cu D intersecția lui AE cu BC. Demonstrați că $ED \leq \frac{AE}{4}$.

*
* *

Scanned with OKEN Scanner

CAP. VII. • POLIGOANE REGULATE •

1. Să se calculeze elementele necunoscute din următoarele tabele:

	R	l_4	a_4	S_4
a)	6 cm			
b)			$\frac{2\sqrt{2}}{5}$ dm	
c)		6 cm		
d)				$8x^2\,m^2$

	R	l_3	a_3	S_3
a)	10 cm			
b)				$0,36\sqrt{3}\ m^2$
c)			4 cm	
d)		$\frac{3\sqrt{2}}{2}$ dm		

	R	l_3	a_3	S_3
a)	4 cm			
b)		0,6 cm		
c)			3 m	
d)				$\frac{75\sqrt{3}}{2}\ cm^2$

2. Calculați aria triunghiului echilateral circumscris unui cerc în funcție de aria pătratului înscris în același cerc.

3. Calculați aria unui triunghi echilateral știind că diferența dintre raza cercului circumscris și a celui înscris triunghiului respectiv este egală cu 7 cm.

4. Aria unui triunghi echilateral este $27\sqrt{3}\ cm^2$. Determinați aria pătratului înscris în cercul circumscris triunghiului.

5. Suma măsurilor unghiurilor interioare ale unui poligon regulat este egală cu 2520°. Câte laturi are poligonul ?

6. Câte diagonale are un poligon cu: a) 5 laturi; b) 10 laturi;) n laturi ?

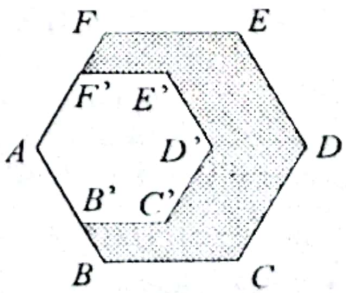
7. Calculați latura, apotema și aria unui poligon regulat cu:

a) 8 laturi ; b) 12 laturi

dacă $R = 3$ cm.

8. Trapezul $ABCD$ cu diagonala $BD = 6$ cm și baza mică AB, este înscris într-un cerc. Calculați raza cercului dacă: a) $m(\sphericalangle D) = 30°$; b) $m(\sphericalangle D) = 45°$; c) $m(\sphericalangle D) = 60°$.

9. În figura alăturată poligoanele $ABCDEF$ și $AB'C'D'E'F'$ sunt regulate și au raportul laturilor $\frac{6}{5}$. Să se determine aria fiecăruia dintre poligoane dacă aria suprafeței hașurate este $264\sqrt{3}\ cm^2$.



10. Demonstrați că în orice triunghi echilateral are loc relația $r < 0,3 \cdot a$, unde r este lungimea razei cercului înscris și a este lungimea laturii triunghiului.

11. Pe laturile unui hexagon regulat, luate ca baze, se construiesc în exterior pătrate. Să se arate că vârfurile acestor pătrate, diferite de vârfurile hexagonului, formează un dodecagon regulat.

12. Numărul diagonalelor unui poligon cu n laturi este $\frac{n(n-3)}{2}$. Un poligon regulat convex are 594 diagonale. Să se afle măsura unuia dintre unghiurile sale.

13. Să se construiască pătratul înscris în spațiul cuprins între două cercuri secante egale.

14. Se dau: un triunghi echilateral, un pătrat și un hexagon regulat cu lungimea laturii a. Arătați că aria pătratului este mai mică decât media geometrică a ariilor triunghiului și a hexagonului.

15. Fie $ABCDEF$ un hexagon regulat și P punctul de întâlnire al tangentelor duse la cercul său circumscris în punctele A și C. a) Să se demonstreze că PF trece prin mijlocul laturii $[AB]$; b) Să se arate că $PF = R\sqrt{7}$, unde R este raza cercului circumscris.

16. Comparați aria suprafeței mărginite de un pătrat de latură a și cercul său circumscris, cu aria suprafeței mărginite de un cerc de rază a și pătratul circumscris cercului.

17. Latura unui pătrat se prelungește cu dublul ei și din punctul obținut se duce o tangentă la cercul circumscris pătratului. Să se arate că lungimea acestei tangente este dublul lungimii laturii triunghiului echilateral înscris în același cerc.

18. Un poligon regulat cu n laturi înscris în cercul cu raza R are latura $[AB]$ de lungime a. Să se exprime latura poligonului regulat cu $2n$ laturi înscris în același cerc.

19. Să se arate că singurele poligoane cu care se poate executa un pavaj sunt: triunghiul echilateral, pătratul și hexagonul.

20. Un triunghi echilateral ABC este înscris într-un cerc de rază r, AD este o treime din AB, BE este o treime din BC, unde $D \in (AB)$ și $E \in (BC)$. Arătați că $DE = r$.

21. Se dă patrulaterul $ABCD$ înscris în cercul $C(O, R)$, în care $AB = R\sqrt{3}$, $BC = R$ și $CD = R\sqrt{2}$. Să se calculeze lungimile segmentelor $[DA]$ și $[DB]$.

22. Fie $ABCDE$ un pentagon regulat înscris în cercul $C(O, R)$. Notăm cu F intersecția dreptelor AB și CD și fie $\{G\} = AE \cap BC$. Demonstrați că:

a) $\frac{DF^2 - OF^2}{OF} = R$; b) $CF^2 = BC \cdot FG$; c) $DE \| FG$.

23. Considerăm hexagonul regulat $ABCDEF$. Dacă notăm cu M mijlocul laturii $[FE]$ și cu G punctul de intersecție al dreptelor AB și CD, cu H și K punctele de intersecție a dreptei GF cu BC, respectiv AM, atunci: a) $GF = 2AM$; b) $ABHK$ este inscriptibil.

24. În cercul $C(O, r)$ se înscrie triunghiul echilateral ABC și se construiește apoi pătratul $ABDE$, astfel încât BD mai taie odată cercul în F. Dreapta FC intersectează pe DE în G. Demonstrați că: a) $[BF]$ este congruent cu latura hexagonului regulat înscris în $C(O, r)$; b) $FG = 2r\left(\sqrt{3} - 1\right)$; c) $ACGE$ este inscriptibil.

25. Arătați că dacă între lungimile înălțimilor h_1, h_2, h_3 ale unui triunghi și raza r a cercului său înscris există relația $h_1 + h_2 + h_3 = 9r$, atunci triunghiul este echilateral.

Scanned with OKEN Scanner

CAP. VIII. • ARII •

§ 1. • Aria triunghiului •

1. Un triunghi dreptunghic isoscel are aria $10\ cm^2$. Aflați perimetrul său.
2. Un triunghi dreptunghic isoscel are perimetrul $3\left(2+\sqrt{2}\right)$. Aflați aria sa.
3. Un triunghi dreptunghic cu un unghi de 30° are ipotenuza 40 cm. Aflați aria sa.
4. Un triunghi dreptunghic cu un unghi de 60° are aria $2\sqrt{3}\ cm^2$. Aflați perimetrul său.
5. Aria unui triunghi echilateral este de $25\sqrt{3}\ cm^2$. Aflați lungimea laturii triunghiului.
6. În triunghiul ABC ($[AB] \equiv [AC]$), AB este mai mare decât BC cu 2 cm, iar perimetrul este de 32 cm. Aflați: a) aria triunghiului; b) lungimea înălțimii $[BB']$, $B' \in AC$.
7. Aflați aria triunghiului ABC, știind că $AB = 10$ cm, $AC = 12$ cm, iar $m(\sphericalangle A) = 45°$.
8. Triunghiul ABC are aria $60\ cm^2$. Aflați aria triunghiului MNP dacă $2MN = AB$, iar $3PP' = CC'$, unde P' este proiecția lui P pe MN și C' este proiecția lui C pe AB.
9. Fie M un punct în interiorul triunghiului ABC și N, P, Q mijloacele segmentelor $[MA]$, $[MB]$, $[MC]$. Aflați raportul dintre ariile triunghiurilor ABC și MNP.
10. Fie ABC un triunghi dreptunghic cu unghiul drept în A. Notăm cu a, b, c lungimile laturilor $[BC]$, $[CA]$ și $[AB]$, cu S, aria triunghiului, iar cu h înălțimea din A (a, b, c și h sunt exprimate în cm, iar S în cm^2). Completați următorul tabel:

a		130	$\sqrt{2}$			$\frac{\sqrt{2}}{3}$	
b	16	50		0,3		$\frac{1}{3}$	2
c	12		1	0,4	7		
S					21		$\sqrt{3}$
h							

11. Fie C, D, E trei puncte situate de aceeași parte a dreptei AB, așa încât triunghiurile ABC, ABD și ABE au aceeași arie. Demonstrați că punctele C, D, E sunt coliniare.
12. Fie M și N două puncte situate respectiv pe laturile (BC) și (CD) ale pătratului $ABCD$ așa încât $\sphericalangle BAM \equiv \sphericalangle MAN \equiv \sphericalangle NAD$. Dacă $AB = 60$ cm, aflați aria triunghiului MAN.
13. Aria unui triunghi dreptunghic este $2730\ cm^2$, iar suma lungimilor catetelor este 151 cm. Aflați: a) ipotenuza; b) diferența catetelor; c) catetele.
14. Un triunghi dreptunghic are aria $84\ cm^2$, iar ipotenuza 25 cm. Aflați catetele.
15. Fie M un punct situat pe latura (BC) a triunghiului ABC, iar N un punct situat pe (AM). Demonstrați că raportul ariilor triunghiului NBC și ABC este egal cu $\frac{MN}{AM}$.
16. În triunghiul ABC notăm cu A', B', C' mijloacele laturilor $[BC]$, $[CA]$ și $[AB]$, iar cu G centrul de greutate. Demonstrați că:
a) Ariile triunghiurilor ABA', ACA', BCB', BAB', CAC' și CBC' sunt egale.
b) Ariile triunghiurilor GBC, GCA și GAB sunt egale.

Scanned with OKEN Scanner

c) Ariile triunghiurilor GBA', GCA', GCB', GAB', GAC' și GBC' sunt egale.

17. Fie G centrul de greutate al triunghiului ABC, iar M simetricul lui A față de G. Cunoscând că aria triunghiului BGM este de $20\ cm^2$, aflați aria triunghiului ABC.

18. Lungimile laturilor unui triunghi sunt $\sqrt{2}+1$, $\sqrt{2}-1$ și $\sqrt{6}$. Calculați aria.

19. Lungimile medianelor unui triunghi ABC sunt: $AA' = 12$ cm, $BB' = 16$ cm, $CC' = 20$ cm. Notăm cu G centrul de greutate, iar cu M simetricul lui A față de G. Calculați: a) aria triunghiului BGM; b) aria triunghiului ABC.

20. Fie ABC un triunghi cu $AB = AC = 12$ cm, M un punct situat pe (BC), iar N și P proiecțiile lui M pe AB și DC. Dacă $MN + MP = 6$ cm, aflați aria triunghiului ABC.

21. În triunghiul ABC cunoaștem că $[AB] \equiv [AC]$, iar suma distanțelor de la un punct M situat pe $[BC]$ la laturile $[AB]$ și $[AC]$ este $5\sqrt{3}$ cm. Cunoscând că aria triunghiului este $25\sqrt{3}\ cm^2$, demonstrați că triunghiul este echilateral.

22. Aflați aria unui triunghi echilateral cunoscând că suma distanțelor de la un punct interior la laturi este egală cu 8 cm.

23. Fie ABC un triunghi dreptunghic în A. Notăm cu D proiecția lui A pe BC, iar cu E proiecția lui D pe AB. Demonstrați că aria triunghiului ABD este medie proporțională între aria triunghiului ABC și aria triunghiului BDE.

24. Fie ABC un triunghi și punctele M și N cu proprietățile $B \in (MC)$, $[MB] \equiv [AB]$, $C \in (BN)$, $[CN] \equiv [AC]$. Notând cu I centrul cercului înscris în triunghiul ABC, demonstrați că triunghiurile IMN și ABC au arii egale.

25. Fie I centrul cercului înscris în triunghiul ABC. Perimetrul triunghiului ABC este de 84 cm, iar ariile triunghiurilor IBC, ICA și IAB sunt direct proporționale cu 13, 14 și 15. Aflați: a) lungimile laturilor triunghiului ABC; b) lungimea înălțimii $[BB']$, $B' \in AC$; c) aria triunghiului ABC; d) raza cercului înscris triunghiului.

26. Demonstrați că dacă două triunghiuri au înălțimile respectiv congruente, atunci ele sunt congruente.

27. Fie ABC un triunghi în care: $AC = 5$ cm, $BC = 11$ cm, $m(\sphericalangle C) = 2\,m(\sphericalangle B) < 90°$. Notăm cu D proiecția lui A pe BC. a) Calculați BD și CD. b) Determinați funcțiile trigonometrice ale unghiurilor $\sphericalangle B$ și $\sphericalangle C$. c) Aflați perimetrul și aria triunghiului.

28. Fie ABC un triunghi cu $m(\sphericalangle A) = 90°$, $m(\sphericalangle B) = 75°$ și aria $18\ cm^2$. Notăm cu M mijlocul lui $[BC]$ și cu H proiecția lui A pe BC. a) Arătați că $AH = \frac{AM}{2} = \frac{BC}{4}$. b) Aflați perimetrul triunghiului.

29. Fie ABC un triunghi ascuțitunghic. Notăm înălțimile cu $[AA']$, $[BB']$, $[CC']$ iar aria cu S. Arătați că: a) $ctg\,C + ctg\,A = \frac{BC}{AA'}$; $ctg\,A + ctg\,C = \frac{AC}{BB'}$; $cg\,B + ctg\,A = \frac{AB}{CC'}$; b) $ctg\,A + ctg\,B + + ctg\,C = \frac{AB^2 + AC^2 + BC^2}{4S}$.

30. Fie ABC un triunghi, $M \in (AB)$, $N \in (AC)$ și O punctul de intersecție a dreptelor BN și CM. Arătați că: a) $A_{BNC} > A_{MNC}$; b) $A_{BOC} > A_{MON}$; c) $OB \cdot OC > OM \cdot ON$.

31. Fie $[AD$ bisectoarea unghiului A al triunghiului ABC, $D \in (BC)$. Demonstrați că:

a) Dacă $m(\sphericalangle A) = 120°$, atunci $\frac{1}{AD} = \frac{1}{AB} + \frac{1}{AC}$.

b) Dacă $m(\sphericalangle A) = 60°$, atunci $\frac{\sqrt{3}}{AD} = \frac{1}{AB} + \frac{1}{AC}$.

Scanned with OKEN Scanner

c) Dacă $m(\sphericalangle A) = 90°$, atunci $\frac{\sqrt{2}}{AD} = \frac{1}{AB} + \frac{1}{AC}$.

*

§ 2. • Aria patrulaterului •

32. Un dreptunghi are perimetrul 56 cm, iar lungimea este de 3 ori mai mare decât lățimea. Aflați aria dreptunghiului.

33. Perimetrul unui dreptunghi este de 246 cm, iar lungimea este cu 13 cm mai mare decât lățimea. Aflați aria dreptunghiului.

34. Un dreptunghi are diagonala de două ori mai mare decât lățimea, iar perimetrul este egal cu $14\left(\sqrt{3}+1\right)$ cm. Calculați aria dreptunghiului.

35. Două dreptunghiuri au ariile egale. Lățimea primului dreptunghi este de 3 ori mai mare decât a celui de-al doilea, iar lungimea primului este cu 22 m mai mică decât a celui de-al doilea. Aflați lungimea primului dreptunghi.

36. Un dreptunghi are lungimea de 3 ori mai mare decât lățimea, iar un pătrat are latura egală cu 5/6 din lungimea dreptunghiului. a) Aflați raportul dintre aria dreptunghiului și aria pătratului. b) Dacă aria pătratului este cu 52 mai mare decât aria dreptunghiului, aflați perimetrele celor două patrulatere.

37. Aflați ariile a două dreptunghiuri știind că lungimea primului este 4/3 din lungimea celui de-al doilea, lățimea primului este 7/9 din lățimea celui de-al doilea, iar diferența ariilor este 1/4.

38. Un pătrat și un triunghi echilateral au perimetre egale. Aflați raportul ariilor.

39. Dintre toate romburile cu aceeași latură, care are aria maximă?

40. Demonstrați că oricare ar fi punctul M situat în interiorul paralelogramului $ABCD$, avem: $A_{MAB} + A_{MCD} = \frac{1}{2} A_{ABCD}$.

41. Fie $ABCD$ un paralelogram și $F \in (AB)$, $E \in (CD)$, așa încât (EF) trece prin intersecția diagonalelor paralelogramului. Dacă $A_{ABCD} = 40$ și $A_{AFCE} = 30$, aflați A_{ABCE}.

42. Un dreptunghi $ABCD$ are $AB = 20$ cm și $BC = 15$ cm. Fie E și F proiecțiile lui B și D pe AC. a) Demonstrați că $BEDF$ este paralelogram. b) Aflați aria lui $BEDF$.

43. Fie $ABCD$ un paralelogram cu $AB = 2\,CD$. Notând cu M mijlocul lui $[AB]$, demonstrați că aria paralelogramului este egală cu $MC \cdot MD$.

44. Pe un cerc cu raza 4 cm considerăm punctele A, B, C, D așa încât măsurile arcelor AB, BC, CD și DA sunt proporționale cu 2, 2, 3 și 5. Aflați aria patrulaterului $ABCD$.

45. Dintr-un punct A exterior cercului de centru O și rază 3 cm ducem tangentele AB și AC (B și C aparțin cercului). Dacă $m(\sphericalangle BAC) = 60°$, calculați A_{ABOC}.

46. Pe laturile (AB), (BC), (CD) și (DA) ale dreptunghiului $ABCD$ se iau punctele M, N, P, Q așa încât $AM = CP = \frac{1}{3} AB$ și $BN = DQ = \frac{1}{3} BC$. Calculați raportul ariilor patrulaterelor $MNPQ$ și $ABCD$.

47. Pe diagonala (AC) a pătratului $ABCD$ se iau punctele E și F așa încât $[AE] \equiv [CF]$ și $E \in (AF)$. a) Demonstrați că $BEDF$ este romb. b) Dacă aria rombului este egală cu aria

Scanned with OKEN Scanner

triunghiului ABC, aflați raportul $\frac{AE}{AC}$.

48. Un trapez isoscel cu diagonalele perpendiculare are linia mijlocie egală cu 15 cm. Aflați aria trapezului.

49. Fie $ABCD$ un trapez, $[MN]$ linia mijlocie și O mijlocul acesteia. Perpendiculara în O pe MN taie bazele AB și CD în P și respectiv Q. a) Demonstrați că $MNPQ$ este romb. b) Cunoscând că aria trapezului $ABCD$ este de 72, aflați aria rombului.

50. Fie $ABCD$ un paralelogram. Notăm cu M simetricul lui A față de B, cu N simetricul lui B față de C, cu P simetricul lui C față de D, iar cu Q simetricul lui D față de A. Calculați raportul ariilor patrulaterelor $MNPQ$ și $ABCD$.

51. Fie $ABCD$ un trapez dreptunghic cu $AB = a$, $CD = b$, $AD \perp AB$, $AD = a + b$. Fie E punctul situat pe (AD) cu proprietatea $AE = a$. Demonstrați că $2 \cdot A_{BCE} < A_{ABCD}$.

52. Fie $ABCD$ un trapez cu bazele $AB = a$, $CD = b$. Demonstrați că: a) $\frac{A_{AOB}}{A_{BOC}} = \frac{A_{BOC}}{A_{COD}} = \frac{a}{b}$;

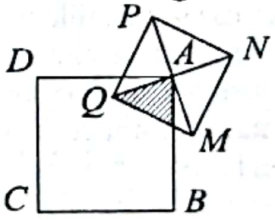
b) $A_{BOC} = A_{AOD} = \sqrt{A_{AOB} \cdot A_{COD}}$; c) $\frac{A_{AOB}}{A_{COD}} = \left(\frac{a}{b}\right)^2$; d) $A_{AOB} + A_{COD} > A_{BOC} + A_{AOD}$; e) $A_{BOC} < \frac{1}{4} A_{ABCD}$.

53. Fie punctele E, F pe latura (AB) a triunghiului ABC, cu $[AE] \equiv [EF] \equiv [FB]$. Paralelele duse prin E și F la BC taie pe AC în G și H. Demonstrați că: $\frac{A_{AGE}}{1} = \frac{A_{FEGH}}{3} = \frac{A_{BCHF}}{5}$.

54. Fie ABC un triunghi dreptunghic isoscel, cu unghiul drept în C, iar D și E sunt două puncte situate respectiv pe (AB) și (AC) așa încât $DE \parallel BC$. Demonstrați că $A_{ADE} = A_{BCED}$ dacă și numai dacă $[AD] \equiv [AC]$.

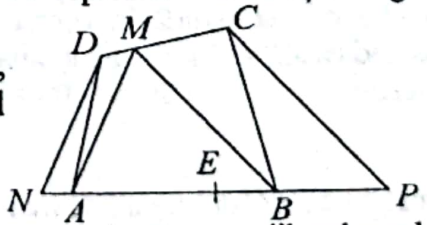
55. Fie ABC un triunghi dreptunghic în A și punctele $D \in (AB)$, $E \in (BC)$, $F \in (AC)$, așa încât $ADFE$ este pătrat. Demonstrați că $2A_{ADEF} \leq A_{ABC}$. Când are loc egalitatea ?

56. În figura alăturată $ABCD$ și $MNPQ$ sunt pătrate, A este centrul pătratului $MNPQ$, iar $MN = 2$ cm. Calculați aria suprafeței hașurate.

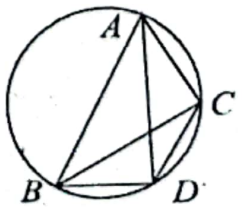


57. Fie $ABCD$ un paralelogram și M un punct situat în interiorul său. Demonstrați că $A_{MAB} = A_{MBC} = A_{MCD} = A_{MAD}$ dacă și numai dacă M reprezintă intersecția diagonalelor paralelogramului.

58. În figura alăturată $ABCD$ este un patrulater convex, $M \in (CD)$, $DN \parallel AM$, $CP \parallel MB$ și E este mijlocul lui $[NP]$. Arătați că $A_{AEMD} = A_{BEMC}$.



59. Triunghiul ABC cu $m(\sphericalangle A) = 60°$ este înscris într-un cerc, iar D este mijlocul arcului BC. Dacă $AD = 4$ cm, calculați aria patrulaterului $ABDC$.



Scanned with OKEN Scanner

§ 3. • Lungimea și aria cercului •

60. Completați următorul tabel:

Raza cercului (în cm)	3			$\sqrt{2}$			0,2		
Lungimea cercului (în cm)		20π			$\pi\sqrt{3}$			π	
Aria cercului (în cm)			144π			5π			$0,04\pi$

61. Raportul lungimilor a două cercuri este 3. Aflați raportul ariilor cercurilor.

62. Raportul ariilor a două cercuri este 225. Aflați raportul lungimilor cercurilor.

63. Aflați lungimea și aria cercului circumscris triunghiului echilateral de arie $9\sqrt{3}$ cm^2.

64. Un romb are aria 30 și latura de 6. Aflați lungimea și aria cercului înscris.

65. a) Aflați raportul dintre lungimea cercului circumscris și lungimea cercului înscris unui triunghi echilateral.
b) Aflați raportul dintre aria cercului circumscris și aria cercului înscris unui triunghi echilateral.

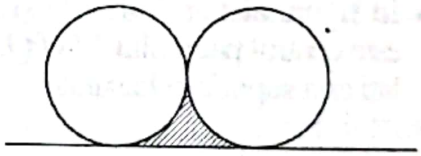
66. Considerăm cercul circumscris și cercul înscris unui pătrat. Calculați:
a) raportul lungimilor celor două cercuri; b) raportul ariilor celor două cercuri.

67. Trei cercuri de centre O_1, O_2, O_3 sunt tangente exterioare două câte două. dacă perimetrul triunghiului $O_1O_2O_3$ este 10 cm, calculați suma lungimilor celor trei cercuri.

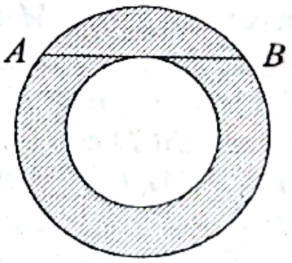
68. Aflați lungimea și aria cercului înscris într-un triunghi cu aria de 42 cm^2 și perimetrul de 30 cm.

69. Fie $M \in [AB]$, mobil. Construim triunghiurile echilaterale AMN și BMP.
a) Demonstrați că suma lungimilor cercurilor circumscrise triunghiurilor AMN și BMP este constantă.
b) În ce caz suma ariilor celor două cercuri este maximă ? Dar minimă ?

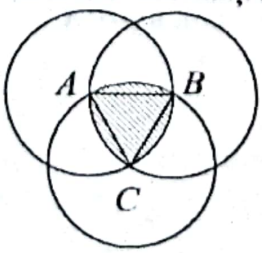
70. În figura alăturată sunt reprezentate două cercuri tangente exterioare și o tangentă exterioară comună. Dacă raza fiecărui cerc este 1 cm, calculați aria suprafeței haşurate.



71. În figura alăturată sunt reprezentate două cercuri concentrice iar $[AB]$ este tangentă cercului mic și coardă în cercul mare. Cunoscând că $AB = 10$ cm, aflați aria suprafeței haşurate.

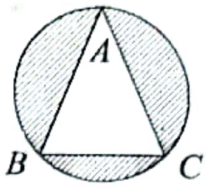


72. Triunghiul ABC din figura de mai jos este echilateral cu latura 2 cm, iar cele trei cercuri au centrele în A, B, C și razele egale cu 2 cm. Calculați aria suprafeței haşurate.



Scanned with OKEN Scanner

73. Aria cercului din figura alăturată este $8\pi\ cm^2$, $[AB] \equiv [AC]$, iar $m(\sphericalangle BAC) = 45°$. Aflați:
a) aria triunghiului;
b) aria fiecăreia dintre suprafețele haşurate;
c) lungimile arcelor $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{BC}$ și $\overset{\frown}{CA}$.



74. Aria cercului circumscris unui triunghi dreptunghic este $25\pi\ m^2$, iar raportul catetelor este 3 / 4. Aflați aria cercului înscris.

*

§ 4. • Probleme diverse •

75. Fie M și N puncte pe latura $[BC]$ a triunghiului ABC astfel încât $[BM] \equiv [MN] \equiv [NC]$. Dreptele AM și AN taie linia mijlocie paralelă cu BC în Q și respectiv P. Dacă aria trapezului $MNPQ$ este $10\ cm^2$, aflați aria triunghiului ABC.

76. Două cercuri de centre O_1 și O_2 având ariile $16\pi\ cm^2$ și $81\pi\ cm^2$, sunt tangente exterioare. Fie AB o tangentă comună exterioară (A este pe primul cerc, iar B pe al doilea). Calculați aria patrulaterului O_1ABO_2.

77. Fie $ABCD$ un patrulater convex și O intersecția diagonalelor sale. Cunoscând că $A_{AOB} = 20\ cm^2$, $A_{BOC} = 25\ cm^2$ și $A_{COD} = 35\ cm^2$, aflați A_{ABCD}.

78. Fie ABC un triunghi în care $m(\sphericalangle ABC) = m(\sphericalangle ACB) = 15°$. Notăm cu D proiecția punctului C pe dreapta AB și construim pătratul $CDEF$, așa încât $D \in (AE)$. Demonstrați că aria acestui pătrat este egală cu aria triunghiului ABC.

79. Fie $ABCD$ un patrulater înscris într-un cerc cu aria de $100\pi\ cm^2$ și $AB = BC = CD = 10$ cm. a) Arătați că $[AD]$ este diametru. b) Calculați aria patrulaterului.

80. Laturile unui triunghi ABC au proprietatea $b = \sqrt{ac}$. Demonstrați că triunghiul dat este asemenea cu un triunghi ale cărui laturi sunt congruente cu înălțimile primului.

81. Demonstrați că toate patrulaterele înscrise într-un cerc de rază R, aria maximă o are pătratul.

82. Fie $ABCD$ patrulater convex cu $AB + CD + BD = 20$ și $A_{ABCD} = 50$.
a) Demonstrați că $ABCD$ este trapez; b) Calculați lungimea diagonalei $[AC]$.
c) Aflați măsura unghiului format de diagonale.

83. Fie punctele A', B', C' situate pe laturile (BC), (CA) și (AB) ale triunghiului ABC, așa încât AA', BB' și CC' sunt concurente într-un punct M. Demonstrați că:

a) $\dfrac{A_{ABM}}{A_{MBC}} = \dfrac{AB'}{B'C}$, $\dfrac{A_{ACM}}{A_{MBC}} = \dfrac{AC'}{C'B}$;

b) $\dfrac{AM}{MA'} = \dfrac{A_{ABM}}{A_{MBA'}} = \dfrac{A_{ACM}}{A_{MCA'}} = \dfrac{A_{ABM} + A_{ACM}}{A_{MBC}}$;

c) $\dfrac{AB'}{B'C} + \dfrac{AC'}{C'B} = \dfrac{AM}{MA'}$; (Relația lui *Van Aubel*)

d) $\dfrac{MA'}{AA'} + \dfrac{MB'}{BB'} + \dfrac{MC'}{CC'} = 1$; e) $\dfrac{MA}{MA'} + \dfrac{MB}{MB'} + \dfrac{MC}{MC'} \geq 6$.

*
* *

Scanned with OKEN Scanner

clasa a VIII-a

CAP. I. • NUMERE REALE •

1. Calculați: a) $\sqrt{\frac{\left(5+\frac{1}{3}\right)\cdot\left(2-\frac{1}{5}\right)}{\left(6+\frac{1}{8}\right)\cdot\left(8+\frac{1}{6}\right)}}\cdot\frac{35}{6\sqrt{5}}$; b) $\sqrt{\frac{5\sqrt{12}\cdot\sqrt{99}}{\sqrt{300}\cdot\sqrt{363}}\cdot\frac{\sqrt{11}}{\sqrt{3}}}$.

2. Efectuați: a) $\sqrt{\sqrt{3}^{0}+\sqrt{3}^{1}+\sqrt{3}^{2}+\ldots+\sqrt{3}^{9}}$;

b) $\sqrt{\frac{2^{-4}}{3^{-2}}\cdot\frac{(-3)^{-4}}{(-2)^{-2}}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^{-1}}$; c) $\sqrt{2\sqrt{2}\cdot\sqrt{5-\sqrt{3}}\cdot\sqrt{\sqrt{5}+\sqrt{3}}}$.

3. Calculați: $\sqrt{\left(\frac{3}{1-\sqrt{3}}\right)^{2}}-\sqrt{\left(\frac{3}{1+\sqrt{3}}\right)^{2}}$.

4. Arătați că: $\sqrt{\frac{19}{10}+\frac{6}{\sqrt{10}}}+\sqrt{\frac{19}{10}-\frac{6}{\sqrt{10}}}=2$.

5. Efectuați: $\sqrt{\frac{9}{5}+\frac{4}{\sqrt{5}}}-\sqrt{\frac{9}{5}-\frac{4}{\sqrt{5}}}-\sqrt{\frac{21}{5}-\frac{8}{\sqrt{5}}}$.

6. Arătați că: $\sqrt{6400}+\sqrt{6144}+\sqrt{4800}+\sqrt{4608}=\left(1+\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^{4}$.

7. Verificați egalitatea: $\sqrt{\frac{4+2\sqrt{3}}{4-2\sqrt{3}}}+\sqrt{\frac{4-2\sqrt{3}}{4+2\sqrt{3}}}=4$.

8. Arătați că: $4\sqrt{3+2\sqrt{2}}-\sqrt{57+40\sqrt{2}}\in\mathbf{Q}$.

9. Aflați un număr cunoscând că 2 % din el este egal cu:

$$\frac{3,20}{\left(1,25+\sqrt{6,5}\right)\cdot\frac{16}{5}}+\frac{4,25\cdot 0,(2)}{\frac{17}{4}\cdot\left(\sqrt{27,5625}-1,5\right)\cdot 0,(1)}.$$

10. Fie $A=\left\{-5,\frac{1}{5},\frac{14}{7},\sqrt{2},-\sqrt{3},41,\sqrt{16},\pi,2,(3)\right\}$. Determinați: $A\cap\mathbf{R}$, $A\cap\mathbf{Q}$, $A\cap(\mathbf{R}-\mathbf{Q})$, $A\cap\mathbf{Z}$, $A\cap\mathbf{N}$, $A\cap\mathbf{Z}^{*}$, $A-\mathbf{R}$, $A-(\mathbf{R}-\mathbf{Q})$, $A-\mathbf{Z}$, $A-\mathbf{N}^{*}$, $A-\mathbf{Q}$.

11. Reprezentați pe axă numerele: -7, $-\frac{8}{3}$, $+\sqrt{3}$, $0,7$, $\sqrt{5}$.

12. Aflați a 1995-a zecimală a numerelor: a) $0,2(781)$; b) $\frac{1}{3}$.

Scanned with OKEN Scanner

13. Demonstrați că $\sqrt{3}-\sqrt{2}\in\mathbf{R}-\mathbf{Q}$.

14. Determinați $\min\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}-1,\ 2-\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)$.

15. a) Fără a extrage rădăcină pătrată, stabiliți care dintre numerele $\sqrt{5}+2\sqrt{3}$ și $\sqrt{7}+\sqrt{10}$ este mai mare.

b) Precizați care dintre numerele $\sqrt{\sqrt{17}-\sqrt{11}}$ și $\sqrt{\sqrt{19}-\sqrt{13}}$ este mai mare.

16. Calculați $E=\dfrac{1+A\cdot B}{A+B}-\dfrac{1-AB}{A-B}$ unde:

$$A=\sqrt{4+\sqrt{8}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}\cdot\sqrt{2\cdot\sqrt{2+\sqrt{2}}};$$

$$B=\left(3\sqrt{8}-2\sqrt{12}+\sqrt{20}\right):\left(3\sqrt{18}-2\sqrt{27}+\sqrt{45}\right).$$

17. Arătați că: $\dfrac{\sqrt{5}}{9}+\dfrac{\sqrt{6}}{10}+\dfrac{\sqrt{7}}{11}+\dfrac{\sqrt{8}}{12}<1$.

18. Arătați că: $\dfrac{3}{\sqrt{2}}+\dfrac{5}{\sqrt{6}}+\dfrac{7}{\sqrt{12}}+\dfrac{9}{\sqrt{20}}+\ldots+\dfrac{49}{\sqrt{600}}>48$.

19. Arătați că: $\sqrt{5}+\sqrt{8}+\sqrt{40}+\sqrt{125}<\sqrt{10}+\sqrt{90}+\sqrt{128}<\sqrt{129}+\sqrt{160}$.

20. Aflați valoarea expresiei: $E(a,b)=(a+1)^{-1}+(b+1)^{-1}$, pentru $a=\left(2+\sqrt{3}\right)^{-1}$ și $b=\left(2-\sqrt{3}\right)^{-1}$.

21. Demonstrați că: $\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}+\sqrt{3+2\sqrt{2}}+\sqrt{6-4\sqrt{2}}-2\sqrt{6}\in\mathbf{Q}$.

22. Aflați valorile numărului natural n astfel încât $\sqrt{n^2+2n+8}$ să fie număr rațional.

23. Arătați că: a) $(m+10)^2-2(m-10)(m+10)+(m-10)^2=400$;

b) $(m+3)^2-2(m-2)(m-3)+(m-2)^2=25,\ (\forall)m\in\mathbf{R}$.

24. a) Dacă $a-b=1$ să se calculeze valoarea expresiei $a^2+a-2ab+b^2-b$.

b) Dacă $a+b=2$ să se calculeze valoarea expresiei $a^2+b^2+2a+2b+2ab$.

25. Să se arate că: a) $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$; b) $x^3+y^3=(x+y)^2-3xy(x+y)$;

c) $x^4+y^4=(x+y)^4-4(x+y)^2xy+4x^2y^2,\ (\forall)x,y\in\mathbf{R}$.

26. Să se arate că oricare ar fi k număr întreg strict negativ are loc egalitatea:

$$|5k+1|=5|k|-1=5|k+1|+4.$$

27. Calculați $A=\dfrac{a|y-b|+a|y-c|+c|x-a|+c|x-b|}{|x-a|+|x-b|+|y-b|+|y-c|}$ știind că $a\le x\le b\le y\le c$.

28. Fie $a,b\in\mathbf{R}$ și $E=a(7a+6b)^2-(a+b)(6a+7b)^2+b(7a+6b)^2$.

a) Demonstrați că $E=13(a-b)(a+b)^2$.

b) Calculați E pentru $a=\dfrac{15}{13}$ și $b=\dfrac{-2}{13}$ apoi pentru $a=\sqrt{2}-\dfrac{1}{13}$ și $b=\sqrt{2}+\dfrac{1}{13}$.

29. Demonstrați că $(\forall)a,b,c\in\mathbf{R}$ are loc: $(-a+b+c)\cdot(a-b+c)=c^2-(a-b)^2$.

30. a) Dacă $a^2-b^2=24$ și $a-b=3$ calculați $a+b$.

Scanned with OKEN Scanner

b) Dacă $ab + bc + ca = 19$ și $a + b + c = 25$ să se calculeze $a^2 + b^2 + c^2$.

31. Fie $a, b \in \mathbf{R}$, $b = 1 - a$ arătați că:

$$(a-b)\left(a^2+b^2\right)\left(a^4+b^4\right)\left(a^8+b^8\right)\ldots\left(a^{32}+b^{32}\right)\left(a^{64}+b^{64}\right) = a^{128} - b^{128}.$$

32. Dacă a, b, c sunt numere reale cu proprietatea $abc = -1$, calculați:

$$\frac{a^{100}b^{101}c^{102} + b^{100}c^{101}a^{102} + c^{100}a^{101}b^{102}}{a^{1000}b^{1001}c^{1002} + b^{1000}c^{1001}a^{1002} + c^{1000}a^{1001}b^{1002}}.$$

33. Verificați identitatea: $x^5 + \frac{1}{x^5} = \left(x^4 + \frac{1}{x^4}\right)\left(x + \frac{1}{x}\right) - \left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right)$, unde $x \in \mathbf{R}^*$.

34. Demonstrați că dacă $a + b = 1$ atunci $a^4 + b^4 - 2a^3 - 2a^2b^2 + a^2 - 2b^3 + b^2 = 0$.

35. Demonstrați că dacă a, b, c sunt trei numere naturale consecutive (în această ordine) atunci $b \mid \left(a^3 + c\right)$.

36. Dacă $a^2 + b^2 = kab$, $k \in \mathbf{N}$, $k > 2$, $a, b \in \mathbf{R}^*$, $a \neq b$. Determinați în funcție de k, $\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^2$.

37. Dacă $a, b, c \in \mathbf{N}^*$ arătați că $\left(a\frac{b}{c}\right)^2 - \left(\frac{ab}{c}\right)^2 = 2\frac{a \cdot b}{c}$.

38. Dacă $b \in \mathbf{Z}$, $a \in \mathbf{Q}$, iar inversul numărului $a - b$ este $a + b$, să se arate că $|a| = 1$.

39. Dacă a, b, c sunt numere reale strict pozitive arătați că nu poate fi verificată relația:

$$a : (b + c) = a : b + a : c.$$

40. Dacă $x \in \mathbf{R}$ și $x + \frac{1}{x} = 2$, calculați $x^4 + \frac{1}{x^4}$.

41. Arătați că dacă $x, y, z, a \in \mathbf{R}$, $x + y + z = a$ și $(x-a)^2 + (y-a)^2 + (z-a)^2 = 2a^2$ atunci $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

42. Demonstrați că dacă $a + b = a^2 + b^2 = a^3 + b^3$, unde $a, b \in \mathbf{R}$, $a, b \neq 0$ atunci $a + b = 2$.

43. Dacă $a + b = 1$, $a^3 + b^3 = \frac{1}{2}$ să se calculeze $a \cdot b$.

44. Determinați $a + b$ știind că $a^2 + b^2 = 13t^2$ și $a - b = |t|$, $a, b, t \in \mathbf{R}$.

45. Găsiți $n \in \mathbf{Z}$ pentru care fracția $\frac{n^2 + n + 3}{2n^2 + 3n + 4}$ se poate simplifica.

46. Arătați că numerele $A = \frac{5k-3}{4}$ și $B = \frac{7k-2}{6}$ nu pot fi ambele întregi pentru aceleași valori ale lui $k \in \mathbf{Z}$.

47. Pe axa numerelor considerăm originea O și punctele A, B și C corespunzând respectiv numerelor reale $\sqrt{2}$, $-\sqrt{3}$ și π. Comparați lungimile segmentelor $[AB]$ și $[OC]$.

48. Dacă a și b sunt numere reale astfel încât $\frac{a}{b} = \frac{2}{3}$, calculați a) $\frac{2a+3b}{a-4b}$; b) $\frac{a^2 + ab - b^2}{a^2 - ab + b^2}$.

49. Comparați numerele:

a) $\sqrt{8 - 2\sqrt{7}}$ și $\sqrt{9 - 4\sqrt{2}}$;

b) $\sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}$ și $\sqrt{3} + \frac{1}{\sqrt{3}}$;

c) $\frac{1}{\sqrt{5 - 2\sqrt{6}}}$ și $\frac{1}{\sqrt{3 - 2\sqrt{2}}}$.

Scanned with OKEN Scanner

50. Cunoscând că a și b sunt numere reale cu proprietatea $a^2+b^2=1$ calculați $\sqrt{a^4+4b^2}+\sqrt{b^4+4a^2}$.

51. Știind că a și b sunt numere reale cu proprietatea $0<a<b<1$ ordonați crescător numerele $-a,\ -b,\ a^2,\ b^2,\ \frac{1}{a},\ \frac{1}{b},\ -1,\ 0,\ 1$.

52. Fie n un număr natural. Stabiliți dacă fracția $\frac{5^n\cdot 2^{n+1}+4}{5^{n+1}\cdot 2^n+4}$ este:

a) ireductibilă; b) supraunitară, subunitară sau echiunitară.

53. Fie a și b două numere reale cu proprietatea $ab\neq -1$. Demonstrați că dacă $x=\frac{1+a}{1+ab}$ și $y=\frac{a+ab}{1+ab}$ atunci $\frac{x+y-1}{x-y+1}=a$.

54. Aflați valoarea minimă a expresiei $E(x,y)=2x^2-2x+y^2-2xy+2$, unde $x,y\in\mathbf{R}$.

55. Efectuați: $\left(\frac{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}-\sqrt{ab}\right):(a-b)+\frac{2\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$, unde $a,b>0,\ a\neq b$.

56. Arătați că: $\frac{\sqrt{a^3}+\sqrt{ab^2}-\sqrt{a^2b}-\sqrt{b^3}}{a-b}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{a}}+\frac{1}{\sqrt{b}}\right)=\frac{a+b}{\sqrt{ab}}$, $a,b>0,\ a\neq b$.

57. Efectuați: $\frac{a^3b-ab^3-\sqrt{ab}\left(a^2-b^2\right)}{1-ab}-\frac{\sqrt{ab}\left(b^2-a^2\right)}{1+\sqrt{ab}}$, $a,b>0,\ ab\neq 1$.

58. Efectuați: $\frac{\sqrt{a}+1}{a\sqrt{a}+a+\sqrt{a}}:\frac{1}{a^2-\sqrt{a}}$, unde $a\in\mathbf{R}_+^*-\{1\}$.

59. Dacă x,y sunt numere întregi consecutive și $z=xy$, calculați: $\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

60. Fie $x>0$, astfel încât $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=7$. Calculați: $x^2+\frac{1}{x^2};\ x^3+\frac{1}{x^3};\ x^4+\frac{1}{x^4}$.

61. Calculați valoarea expresiei $\frac{xy-\sqrt{x^2-1}\cdot\sqrt{y^2-1}}{xy+\sqrt{x^2-1}\cdot\sqrt{y^2-1}}$, pentru $x=\frac{1}{2}\left(a+\frac{1}{a}\right)$ și $y=\frac{1}{2}\left(b+\frac{1}{b}\right)$, unde $a,b\geq 1$.

62. a) Cunoscând că $ab=7$ și $a+b=10$ să se calculeze a^3+b^3.

b) Dacă $a^2+b^2=12$ și $ab=5$ calculați $a-b$.

63. Determinați $n\in\mathbf{Z}^*$ pentru care $\sqrt{6n-n^2}\in\mathbf{Q}$.

64. Determinați $n\in\mathbf{Z}$ pentru care $\sqrt{12+4n-n^2}\in\mathbf{Q}$.

65. a) Arătați că $\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{(a+b)^2}}=\left|\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{1}{a+b}\right|$, $a,b\in\mathbf{R}^*$;

b) Calculați: $S=\sqrt{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}}+\ldots+\sqrt{1+\frac{1}{99^2}+\frac{1}{100^2}}$.

*

* *

Scanned with OKEN Scanner

CAP. II. • INTERVALE, INECUAȚII ȘI SISTEME DE INECUAȚII •

§ 1. • Intervale •

1. Scrieți sub formă de intervale mulțimile:

$A = \{x \mid x \in \mathbf{R} \text{ și } 1 \le x \le 3\}$; $B = \{x \mid x \in \mathbf{R} \text{ și } 1 < x < 3\}$;

$C = \{x \mid x \in \mathbf{R} \text{ și } 0 < x \le 9\}$; $D = \{x \mid x \in \mathbf{R} \text{ și } -3 \le x < 3\}$;

$E = \{x \mid x \in \mathbf{R} \text{ și } x < 3\}$; $F = \{x \mid x \in \mathbf{R} \text{ și } x \le -2\}$;

$G = \{x \mid x \in \mathbf{R} \text{ și } x > 4\}$; $H = \{x \mid x \in \mathbf{R} \text{ și } x \ge -1\}$.

2. Puneți în evidență, pe axă, intervalele: $[-2; 2]$, $(-3; 1]$, $(0; 5]$, $[2; \infty)$, $(4; \infty)$, $(-\infty; 3]$, $(-\infty, -1)$.

3. Considerăm intervalele $I_1 = [0; 4]$, $I_2 = (0; 4)$, $I_3 = [0; 4)$, $I_3 = (0; 4]$. Stabiliți valoarea de adevăr a propozițiilor: a) $I_1 \subset I_2$; b) $I_1 \supset I_2$; c) $I_3 \subset I_4$; d) $I_4 \subset I_3$; e) $I_1 \supset I_3$; f) $I_1 \subset I_4$; g) $0 \in I_4$; h) $\pi \in I_4$.

4. Stabiliți valoarea de adevăr a propozițiilor:

a) $(-\infty; -2) \subset (-\infty; 2)$;

b) $\left(-\infty; -\frac{2}{3}\right) \subset \left(-\infty; -\frac{3}{4}\right)$;

c) $(-2; 0] \subset (-\infty; 0)$;

d) $[2; \infty) \subset \left(\sqrt{2}; \infty\right)$;

e) $[0; \infty) \subset (0; \infty)$;

f) $\left[\sqrt{2}; \infty\right) \supset \left[\sqrt{3}; \infty\right)$;

g) $\left(-\infty; \sqrt{2}\right) \subset \left(-\infty; \sqrt{3}\right)$;

h) $\left(-\infty; -\sqrt{2}\right) \subset \left(-\infty; -\sqrt{3}\right)$.

5. Scrieți sub formă de intervale mulțimile:

a) $(-1; 1) \cup \{-1; 1\}$;

b) $(-1; 1) \cup [1; \infty)$;

c) $(-2; 2] \cup \{-2\}$;

d) $(-\pi; 2\pi) \cup \left(\frac{7}{2}; \infty\right)$;

e) $[0; 7] \cup [3; 9]$;

f) $[-4; 4] \cup [-2; 2]$;

g) $(-3; 3) \cup \{3\} \cup (3; 5)$;

h) $(-\infty; 2) \cup \{2\} \cup (2; \infty)$.

6. Scrieți sub formă de intervale mulțimile:

$A = \{x \mid x \in \mathbf{R}, x < 2 \text{ sau } 2 \le x < 3\}$; $B = \{x \mid x \in \mathbf{R}, -4 < x < 1 \text{ sau } 0 \le x \le 4\}$;

$C = \{x \mid x \in \mathbf{R}, x < 3 \text{ sau } x \ge 3\}$; $D = \{x \mid x \in \mathbf{R}, -1 \le x \le 2 \text{ sau } -3 < x < 9\}$.

7. Scrieți sub formă de intervale: a) $(-2; 2) \cap (-1; 1)$; b) $(-2; 2] \cap [2; \infty)$; c) $[-3; 0] \cap [-2; 4]$; d) $(-3; 9) \cap [-3; 9]$; e) $[4; \infty) \cap [\pi; \infty)$; f) $(-\infty; -4] \cap (-\infty; -\pi]$; g) $(-\infty; 2] \cap [1; \infty)$; h) $(-\infty; -3] \cap [-\pi; \infty)$.

8. Determinați și puneți în evidență, pe axă mulțimile:

a) $(-2; 4) \cap \mathbf{Z}$; b) $[-2; 4] \cap \mathbf{Z}$; c) $[-2; 4] \cap \mathbf{N}$;

d) $(-\pi; \pi) \cap \mathbf{Z}$; e) $\left(-\infty; \sqrt{5}\right] \cap \mathbf{N}$; f) $\left(-\infty; \sqrt{10}\right] \cap \mathbf{N}^*$;

g) $\left(\frac{999}{1000}; \frac{1001}{1000}\right) \cap \mathbf{Z}$; h) $\left(-\frac{1001}{1000}; -\frac{999}{1000}\right) \cap \mathbf{Z}$.

Scanned with OKEN Scanner

9. Care dintre următoarele mulțimi pot fi scrise sub formă de interval ?

$A=(-\infty;-3)\cup(3;\infty)$; $E=(-1;1]\cap[0;3]$;

$B=(-\infty;3)\cup(-3;7)$; $F=(-7;7)\cap\{-2;2\}$;

$C=(-7;0)\cup(0;4)$; $G=(-\infty;4]\cup\left[\sqrt{13};100\right)$;

$D=(-7;0)\cup[0;4)$; $H=(-\infty;4]\cup\left[\sqrt{17};100\right)$.

10. Efectuați: a) $(-3;5)\cap[0;5]$; e) $\left(-\infty;\sqrt{2}+1\right)\cap\left(\sqrt{2};\infty\right)$;

b) $[-4;4]\cap\{-4;4\}$; f) $\left(-\frac{3}{5};\frac{7}{9}\right)\cap\left(\frac{1}{2};\frac{9}{2}\right)$;

c) $(-\infty;9)\cap\{9\}\cap(9;13]$; g) $(-2\pi;2\pi)\cap(-\pi;3\pi)$;

d) $\left(-\infty;\sqrt{3}\right)\cap\left(\sqrt{3}+1;\infty\right)$; h) $\left(-\infty;\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\cap\left(\frac{1}{\sqrt{3}};\infty\right)$.

11. Dacă a este un număr real oarecare, efectuați:

a) $(-\infty;a)\cup\{a\}$; e) $(-\infty;a)\cap(a+1;\infty)$;

b) $(a;a+2)\cap(a+1;a+3)$; f) $(-\infty;a+1)\cap(a;\infty)$;

c) $(a;a+2)\cup(a+1;a+3)$; g) $[a;a+3]\cap(a+1;a+4)$;

d) $(-\infty;a+1)\cup(a;\infty)$; h) $[a;\infty)\cup(a;\infty)$.

12. Demonstrați că pentru orice $a, b\in\mathbf{R}$ cu proprietatea $a<b$ avem:

a) $\frac{a+b}{2}\in(a,b)$; b) $\frac{2a+b}{3}\in(a,b)$; c) $3a+5b\in(8a,8b)$.

13. Pentru ce valori reale ale lui x mulțimea $(-2,2)\cup[x,\infty)$ se poate scrie sub forma unui interval ?

14. Pentru ce valori reale ale lui x are loc relația $(-\infty,x)\subset(-\infty,7)$?

15. Aflați câte numere întregi cuprinde fiecare dintre intervalele:

a) $(-7,7)$; e) $[n,n+4]$ unde $n\in\mathbf{Z}$;

b) $[-7,7]$; f) $(n,n+1)$ unde $n\in\mathbf{Z}$;

c) $(-n,n)$ unde $n\in\mathbf{N}^*$; g) $[n,n+\pi]$ unde $n\in\mathbf{Z}$;

d) $[-n,n]$ unde $n\in\mathbf{N}^*$; h) $[n,n+1]$ unde $n\in\mathbf{R}-\mathbf{Z}$.

16. Dați exemplu de două intervale I_1 și I_2 astfel încât

$$I_1\cup I_2=[0,10] \text{ și } I_1\cap I_2=[2,7].$$

17. Scrieți cu ajutorul intervalelor mulțimile:

$A=\{x\,|\,x\in\mathbf{R},\ |x|<2\}$; $B=\{x\,|\,x\in\mathbf{R},\ |x|\le 2\}$; $C=\{x\,|\,x\in\mathbf{R},\ |x|>-1\}$;

$D=\{x\,|\,x\in\mathbf{R},\ |x|>1\}$; $E=\{x\,|\,x\in\mathbf{R},\ |x|\ge 1\}$; $F=\{x\,|\,x\in\mathbf{R},\ 1\le|x|\le 2\}$.

18. Demonstrați că dacă a și b sunt numere reale cu proprietatea $a\in(b-1,b+1)$ atunci $a-b\in(-1,1)$. Reciproca este adevărată ?

19. Demonstrați că dacă x este un număr real și a este un număr real pozitiv astfel încât $x\in(-a,a)$ atunci $-x\in(-a,a)$.

20. Precizați valorile pe care le poate lua partea întreagă a numărului real x în fiecare dintre cazurile de mai jos: a) $x\in(2,3)$; b) $x\in(2,3]$; c) $x\in[-1,0]$;

d) $x\in(\pi,2\pi)$; e) $x\in\left[-\sqrt{2},\sqrt{2}\right]$; f) $x\in\left[\frac{9}{10},\frac{10}{9}\right]$.

Scanned with OKEN Scanner

21. Determinați numerele întregi a, b, c, d știind că: $\sqrt{1997} \in (a, a+1)$; $100\sqrt{2} \in (b, b+1)$; $10\sqrt{13} \in (c, c+1)$; $100\pi \in (d, d+1)$.

22. Ordonați numerele reale a, b, c știind că au loc simultan relațiile:
$$(-\infty, b) \cap (a, \infty) \neq \emptyset; \quad (-\infty, -a] \cap [-c, \infty) = \emptyset.$$

23. În triunghiul ABC avem $AB = 4$, $AC = 5$, $BC = x$. Determinați intervalul în care se găsește x.

24. În patrulaterul convex $ABCD$ avem: $AB = 6$, $BC = 9$, $CD = 5$ și $DA = 4$. Determinați intervalul căruia îi aparține BD și intervalul căruia îi aparține AC.

*

§ 2. • Inecuații •

1. Rezolvați inecuațiile:

a) $2x < 4$; d) $8x > -16$; g) $-16x < -2$; j) $4 > -4x$;
b) $12x \geq 6$; e) $-x > 20$; h) $-27x \geq 3$; k) $3 \leq -9x$;
c) $4x \leq -28$; f) $-4x \leq -16$; i) $\sqrt{2}\, x > 2$; l) $2\sqrt{3} < -\sqrt{3}\, x$.

2. Rezolvați inecuațiile:

a) $\frac{x}{2} > 1$; d) $\frac{x}{1+\sqrt{3}} < 1 - \sqrt{3}$; g) $2(x-1) - 5 > 4 + x$;

b) $\frac{x}{\sqrt{3}} \leq \sqrt{3}$; e) $2(x+1) - 3 < x + 10$; h) $\frac{5x+6}{6} \geq 0,5 + \frac{x+3}{3}$.

c) $-\frac{x}{4} > \frac{1}{6}$; f) $3x + \frac{x-1}{4} < x + 2$; i) $\frac{x-1}{-1} > \frac{x-1}{-2}$.

3. Rezolvați inecuațiile:

a) $3x + \left(\frac{x}{3} - \frac{x}{4}\right) \leq \frac{2x}{3} + 10$; e) $\frac{x-3}{2} - \frac{3(x+1)}{4} > \frac{5}{2} - \frac{x+10}{2}$;

b) $\frac{1}{2}(x-1) + 5 \geq \frac{3x+1}{3} + \frac{x}{2}$; f) $\frac{7(x+4)}{3} - 3 < 2(x+5) - 0,(6)$;

c) $\frac{3x+1}{2} - \frac{2x}{3} \geq 4 - \frac{x-1}{6}$; g) $\frac{x}{6} - \frac{x - \frac{1}{2}}{3} \geq \frac{1}{3}\left(\frac{2}{5} - \frac{x}{3}\right)$;

d) $\frac{x-2}{2} - \frac{x-3}{3} < \frac{7x-3}{6}$; h) $\frac{1}{4}\left[8 - 2\left(5 + \frac{x}{2}\right) - \frac{x}{3}\right] + \frac{5}{2} \geq \frac{1}{2}\left[3(x-5) - \frac{3(x-4)}{2}\right]$.

4. Dacă a și b sunt numere naturale cu proprietățile $3^a - (-3)^2 = 18$ și $2^b - (-2)^2 = 12$ rezolvați inecuația în x: $\frac{(a-1)x}{3} - \frac{(b+1)x}{4} > \frac{b-a}{2}$.

5. Rezolvați inecuațiile: a) $\sqrt{2}\, x > 3x + 1$; e) $\left(1 - \sqrt{3}\right)x > \left(1 - \sqrt{3}\right)^2$;

b) $\pi x < \sqrt{17}\, x - 1$; f) $x(3 - \pi) \leq 9 - 6\pi + \pi^2$;

c) $\sqrt{2}(x-1) \leq \sqrt{3}(x+1)$; g) $\sqrt{2}\left(\sqrt{5}\, x - 1\right) < 4(x-1)$;

d) $2(x-1) < \sqrt{5}(x-1)$; h) $3(x-5) > 2\left(\sqrt{5}\, x - 2\right)$.

6. a) Rezolvați inecuația în x: $a(x-1) < 3(x-3) + 2a$ știind că a este un număr real, $a > 3$.

Scanned with OKEN Scanner

b) Rezolvați aceeași inecuație în cazul când $a < 3$.

7. Rezolvați inecuațiile: a) $(x+1)^3 - (x-1)^3 > 6x(x+1)$;

b) $x\left(x-\sqrt{2}\right)\left(x+\sqrt{2}\right) \le x\left(x-\sqrt{3}\right)\left(x+\sqrt{3}\right)+1$;

c) $\frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x+1)^2}{3} > \frac{5x(x+2)}{6}$;

d) $\left(x+\sqrt{5}\right)^2 - \left(x-\sqrt{5}\right)^2 \le \sqrt{5}(x+3)$.

8. Aflați: a) cel mai mic număr natural x pentru care: $0,1(x+200) < x$;

b) cel mai mare număr întreg x pentru care: $\sqrt{2}\,x < x-1$.

9. Rezolvați inecuațiile:

a) $2\{2[2(x-1)+3]-1\}-7<4$; c) $[(4x-3):2-1]:2-1>1$;

b) $8-2[3-4(x-5)] \le 10$; d) $3\{3[3(1-x)-1]-1\}\ 1 \le -1$.

10. Rezolvați inecuațiile: a) $\frac{x-3}{3-\pi} < \frac{2x-7}{3-\pi}$; c) $\frac{(x+2)(x+3)}{2^{30}-3^{20}} < \frac{(x+5)^2}{2^{30}-3^{20}}$;

b) $\frac{(x-1)^2}{2-\sqrt{5}} \ge \frac{(x+7)^2}{2-\sqrt{5}}$; d) $\frac{x-7}{|x|+1} \le \frac{3(x-5)}{|x|+1}$.

11. Sunt echivalente ecuațiile $\frac{x}{\sqrt{6}-\sqrt{5}} < \sqrt{6}+\sqrt{5}$ și $\frac{x}{\sqrt{6}+\sqrt{5}} < \sqrt{6}-\sqrt{5}$?

12. Rezolvați inecuațiile:

a) $\frac{0,(1)(x-2)+0,(2)(3-x)}{x^2+5} < 0$; b) $\frac{\sqrt{2}(x-1)-\sqrt{3}(x-2)}{|x|+4} \ge 0$;

c) $\frac{\frac{1}{5}(2x-4)-\frac{1}{2}(5x+4)}{|x-1|+|2-x|} < 0$; d) $\frac{x(x-5)(x+5)-x(x-4)(x+4)}{(x+1)^2+|x-3|} \ge 0$.

13. a) Demonstrați că pentru orice $x \in \mathbf{R}$ avem $x^2+x+1>0$ și $x^2-x+1>0$.

b) Rezolvați inecuațiile: $\frac{2-x}{x^2+x+1} > 0$; $\frac{2x-70}{x^2-x+1} \le 0$; $\frac{1}{x^2+x+1} > \frac{1}{x^2-x+1}$.

14. Rezolvați inecuațiile:

a) $\left(x^2+1\right)(3x-9)<0$; e) $x^2-4x+4 \ge 0$;

b) $\left(x^2+5\right)(2x-10) \ge 0$; f) $x^2-4x+4>0$;

c) $(|x|+4)\left(\frac{x}{2}-\frac{x}{7}\right)>0$; g) $x^2-4x+4 \le 0$;

d) $\left(x^2-x+1\right)\left(\frac{x-1}{2}+\frac{x-2}{3}\right) \ge 0$; h) $x^2+6x+9 \le 0$.

15. Rezolvați inecuațiile: a) $\frac{1}{x^2+10} < \frac{1}{x^2+9}$; c) $\frac{1}{x^2+3} < \frac{1}{x^2+2}$;

b) $\frac{1}{|x|+2} \le \frac{1}{|x|+1}$; d) $\frac{1}{|x-7|+4} \le \frac{1}{|x-7|+5}$.

Scanned with OKEN Scanner

16. Rezolvați inecuațiile:

a) $\frac{1}{x}<0$; b) $\frac{x^2+4}{x-2}<0$; c) $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{x+1}\geq 0$;

d) $\frac{x^2-x+1}{3(x-1)+5}\geq 0$; e) $\frac{x+3}{|x|}>0$; f) $\frac{|x|+3}{x^2}>0$;

g) $\frac{|x|+1997}{(x-1)(x+1)-(x-1)^2}<0$; h) $\frac{x-1}{|x-2|}\geq 0$; i) $\frac{-1-|x-2|}{x+4}\leq 0$.

17. Considerăm funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}, f(x)=2x-7$. Determinați mulțimile:

$A=\{x\,|\,x\in\mathbf{R}, f(x)\leq 3\}$; $B=\{x\,|\,x\in\mathbf{R}, f(x)<2f(x)\}$.

18. Considerăm funcția $f:\mathbf{R}-\{2\}\to\mathbf{R}, f(x)=\frac{x-3}{|x-2|}$. Determinați mulțimile:

$A=\{x\,|\,x\in\mathbf{R}-\{2\}, f(x)\geq 0\}$; $B=\{x\,|\,x\in\mathbf{R}-\{2\}, f(x)\leq 0\}$.

19. Fie funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ definită prin relația $f(x)=\begin{cases} x+2 & \text{dacă } x>0 \\ -x+1 & \text{dacă } x\leq 0 \end{cases}$. Aflați mulțimea valorilor lui x pentru care avem (pe rând): a) $f(x)>10$; b) $f(x)\leq 4$; c) $f(x)>0$.

20. Determinați mulțimile:

$A=\left\{x\,|\,x>2 \text{ și } \frac{1}{x-2}<5\right\}$; $B=\left\{x\,|\,x<2 \text{ și } \frac{1}{x-2}<5\right\}$; $C=\left\{x\,|\,x\neq 2 \text{ și } \frac{1}{x-2}<5\right\}$.

21. Rezolvați inecuația $\frac{1}{x-1}<1$.

22. Rezolvați inecuațiile: a) $|x-1|+2|1-x|\geq 0$; d) $|x|+|x-10|>0$;

b) $|x-3|+5|3-x|\leq 0$; e) $|x-5|+3|5-x|>0$;

c) $|x|+|x-1|+|x+2|\leq 0$; f) $|x-1|+|1-x^2|\leq 0$.

23. Rezolvați inecuațiile:

a) $\frac{x^4+x^2+1}{x^3-1}<0$;

b) $\frac{x^4+x^2+1}{x^3+1}<0$; c) $\frac{1-x^4}{(1+x)\left(1+x^2\right)}<0$;

d) $\frac{1-x^8}{(1+x)\left(1+x^2\right)\left(1+x^4\right)}\leq 0$; e) $\frac{4-x^2}{(x+2)\left(x^2+3\right)}\geq 0$.

24. Rezolvați în mulțimea numerelor naturale inecuațiile:

a) $2^x<300$; b) $3^x<500$; c) $\left(\frac{1}{2}\right)^x\geq\frac{1}{64}$; d) $2^x\geq 3^x$.

25. Considerăm funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}, f(x)=(2a-4)x+a$ unde a este un parametru real, $a\neq 2$. Aflați valorile lui a pentru care:

a) funcția este crescătoare; b) funcția este descrescătoare.

26. Fie funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=\frac{a^2+1}{a-3}\cdot x+2$. Aflați pentru ce valori ale parametrului $a\in\mathbf{R}-\{3\}$ funcția este: a) crescătoare; b) descrescătoare.

Scanned with OKEN Scanner

27. Considerăm inecuația în x: $(x-a)(x+a) \le (x-3a)^2$, a fiind un parametru real nenul. Pentru ce valori ale lui a mulțimea soluțiilor este: a) $[-10; \infty)$; b) $(-\infty; 15]$; c) $[4; \infty)$?

28. Rezolvați în mulțimea numerelor naturale inecuațiile:

a) $(-1)^x (x-1) \ge 2x-3$;

b) $(-1)^x (x-2) \le (-1)^{x+1} (x+4)$; c) $(-1)^{x+1} (x-2) \le (-1)^x (x-4)$.

*

§ 3. • Sisteme de inecuații •

1. Rezolvați sistemele de inecuații:

a) $\begin{cases} 3x-5 < x+1 \\ 2x > 7x-10 \end{cases}$;

b) $\begin{cases} (x-3)(x+3) \ge (x-2)^2 \\ (x-2)(x+2) \ge (x-3)^2 \end{cases}$;

c) $\begin{cases} -5y-2 \ge 1-2y \\ 18+3y > 3-2y \end{cases}$;

d) $\begin{cases} \frac{z}{2} + \frac{z-1}{3} + \frac{z-2}{4} \ge 0 \\ \frac{z}{3} + \frac{z-1}{4} + \frac{z-2}{6} < 0 \end{cases}$;

e) $\begin{cases} \frac{x}{2} - \frac{x+1}{3} \le 0 \\ \frac{x+2}{4} + \frac{x+3}{5} \ge 0 \end{cases}$;

f) $\begin{cases} (x-0,1)(x+0,1) \le x^2 + x \\ \left(x-\sqrt{5}\right)\left(x+\sqrt{5}\right) \le x^2 - x \end{cases}$;

g) $\begin{cases} \frac{x}{x^2+1} \le 0 \\ \frac{x}{x^2-x+1} \ge 0 \end{cases}$;

h) $\begin{cases} \frac{1}{x-2} > 0 \\ \frac{1}{x-7} < 0 \end{cases}$.

2. Rezolvați sistemele de inecuații:

a) $\begin{cases} 3(x-1) < 2(x-1) \\ 5(x-3) < 2(x-1) \\ (x-5)^2 > (x-4)^2 \end{cases}$;

b) $\begin{cases} \left(1+\sqrt{2}\right)x < 1-\sqrt{2} \\ \left(1-\sqrt{2}\right)x < 1+\sqrt{2} \\ x\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right) \ge 0 \end{cases}$;

c) $\begin{cases} (x-1)(x-2) - (x-2)(x-3) \ge 0 \\ (x+1)(x+2) - (x+2)(x+3) \le 0 \end{cases}$;

d) $\begin{cases} 2[2(x-1)-1]-1 \le 0 \\ 2[2(x+1)+1]+1 \ge 0 \end{cases}$.

3. Rezolvați inecuațiile duble de mai jos:

a) $10 < 7x-4 < 80$; b) $-10 < 3(x-1)+2 < 26$;

c) $-1 < 5[2(x+1)-5]-6 < 9$; d) $-26 \le 4-10x \le 54$.

4. Rezolvați în mulțimea numerelor întregi dublele inecuații de mai jos:

a) $2x < 10 < 5x$; b) $5(x+1) \le 13+x < 14+2x$;

c) $2 < \frac{2x+6}{3} < 6$; d) $1 < x^2 < 16$.

5. Dimensiunile unui dreptunghi sunt $5 + 10x$ și $3 - 5x$ unde x este un număr real. a) Aflați intervalul în care se găsește x. b) Demonstrați că aria dreptunghiului nu depășește $\frac{121}{8}$. c) În cazul în care aria este $\frac{121}{8}$, aflați perimetrul dreptunghiului.

6. În ce interval se află numărul real x dacă $6 - x$, $2x$ și $2x + 1$ sunt lungimile laturilor unui triunghi ?

7. Rezolvați sistemele de inecuații:

a) $\begin{cases} 0,(2)x - 10 < 0,2x \\ 0,5x + 10 < 0,(5)x \end{cases}$; b) $\begin{cases} \sqrt{3}\,x - 1 < 3x - \sqrt{3} \\ x\sqrt{2} + \sqrt{3} < x + \sqrt{6} \end{cases}$.

8. a) Știind că $a > b > 0$ rezlvați sistemul de inecuații în x: $\begin{cases} b(b + x) > a(a - x) \\ b(b - x) < a(a - x) \end{cases}$.

b) Rezolvați același sistem în ipoteza $a < b < 0$.

9. Aflați dimensiunile unui dreptunghi (care nu este pătrat) știind că sunt numere întregi, latura mai mare are lungimea $14 - x$, iar perimetrul este $2x - 4$.

10. Considerăm funcția $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definită prin relația $f(x) = 4x - 13$. Aflați valorile lui x pentru care $f(x) \in [-41; -1]$.

11. Considerăm funcția $f: [0; 10] \to \mathbf{R}$ definită prin relația $f(x) = -2x + 9$. Aflați valorile lui x pentru care $f(x) \in [-1; 19]$.

12. Triplul unui număr natural se micșorează cu 5, apoi rezultatul obținut se dublează și se obține astfel 5 % dintr-un număr natural de două cifre. Aflați numărul necunoscut.

13. Demonstrați că dacă $-6 < \left(\frac{x}{4} - \frac{1}{3}\right) \cdot 12 - 2 < 21$ atunci $-7 < 2[2(x - 1) - 1] - 1 < 45$. Reciproca este adevărată ?

14. Considerăm mulțimile: $A = \{x \in \mathbf{R} \mid x - 3 > 0 \text{ și } x + 1 > 0\}$;

$B = \{x \in \mathbf{R} \mid x - 3 < 0 \text{ și } x + 1 < 0\}$; $C = \{x \in \mathbf{R} \mid (x - 3)(x + 1) > 0\}$;

$D = \left\{x \in \mathbf{R} \mid \frac{x - 3}{x + 1} > 0\right\}$; $E = \left\{x \in \mathbf{R} \mid \frac{x + 1}{x - 3} > 0\right\}$.

a) Determinați mulțimile A și B. b) Exprimați mulțimea C în funcție de A și B, apoi determinați mulțimea C. c) Determinați mulțimile D și E.

15. Rezolvați inecuațiile:

a) $(x - 5)(x - 7) > 0$; e) $x^2 + 6x + 8 \geq 0$

b) $x^2 - 1 > 0$; f) $1 - 4x^2 \geq 0$;

c) $9 - x^2 > 0$; g) $\frac{x + 20}{x - 20} > 0$;

d) $x^2 - 6x + 8 \geq 0$; h) $\frac{x + 1}{9 - x} \geq 0$.

16. Sunt echivalente inecuațiile $x^2 - 4 > 0$ și $\frac{x - 2}{x + 2} > 0$? Dar inecuațiile $x^2 - 4 \geq 0$ și $\frac{x - 2}{x + 2} \geq 0$?

Scanned with OKEN Scanner

17. Considerăm mulțimile: $A=\{x\in\mathbf{R}\,|\,x+2>0$ și $x-5<0\}$;

$B=\{x\in\mathbf{R}\,|\,x+2<0$ și $x-5>0\}$; $C=\{x\in\mathbf{R}\,|\,(x+2)(x-5)<0\}$;

$D=\left\{x\in\mathbf{R}\,|\,\frac{x+2}{x-5}<0\right\}$; $E=\left\{x\in\mathbf{R}\,|\,\frac{x-5}{x+2}<0\right\}$.

a) Determinați mulțimile A și B. b) Exprimați mulțimea C în funcție de A și B, apoi determinați mulțimea C. c) Determinați mulțimile D și E.

18. Rezolvați inecuațiile:

a) $x^2-16<0$; b) $x^2-100\le 0$; c) $4-9x^2\le 0$; d) $\frac{x-3}{x+1}<0$;

e) $\frac{x+3}{x-1}\le 0$; f) $x^2-9x+14\le 0$; g) $x^2-3x<0$; h) $\frac{x}{x+5}\le 0$.

19. Sunt echivalente inecuațiile $x^2-3x+2<0$ și $\frac{x-1}{x-2}<0$? Dar inecuațiile $49-x^2\le 0$ și $\frac{7-x}{7+x}\le 0$?

20. Sunt echivalente inecuațiile $\frac{x-1}{x+2}<0$ și $\frac{x+2}{x-1}<0$?

Dar inecuațiile $\frac{x-1}{x+2}\le 0$ și $\frac{x+2}{x-1}\le 0$?

21. Rezolvați inecuațiile:

a) $x(x-5)<3(x-5)$; b) $(x-5)^2\ge 9$;

c) $(3x-1)^2-(x-3)^2>0$; d) $(x+1)^3\le x^3+1$;

e) $(x-2)^3\ge x^3-8$; f) $(x+2)^3>(x-2)^3$.

22. Rezolvați inecuațiile:

a) $\frac{x-2}{x+3}>0$; b) $\frac{x-1}{x+5}\le 1$; c) $\frac{x-3}{x-6}<2$;

d) $\frac{2x-10}{3x-2}\ge 5$; e) $\frac{2x}{x^2-2x+1}>-1$; f) $\frac{4x+3}{x^2+1}\le -1$.

23. Rezolvați în numere întregi inecuațiile:

a) $x^2-2<0$; b) $\frac{2x-1}{2x+1}<1$; c) $10-7x+x^2\le 0$; d) $\frac{x+5}{2x}\le 3$.

24. Câte elemente are mulțimea $A=\left\{n\in\mathbf{Z}\,|\,n^2\le 2^{10}\right\}$?

25. a) Demonstrați că oricare ar fi numărul întreg n avem $n^2-n\ge 0$.

b) Determinați toate perechile de numere întregi x și y care verifică sistemul: $\begin{cases}x^2\le y\\ y^2\le x\end{cases}$.

* * *

Scanned with OKEN Scanner

CAP. III. • FUNCȚII •

1. Care dintre relațiile următoare reprezintă funcții ?

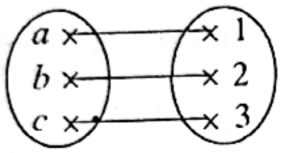
a) $f: \{-2, -1, 0, 1, 2\} \to \{0, 1, 2, 3, 4\}, f(x) = x^2$;

b) $f: \{0, 2, 4\} \to \{0, 1, 3, 5, 7\}, f(x) = 2x - 1$;

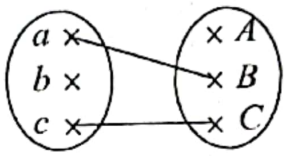
c) $f: (-1, 1) \to (-2, 2), f(x) = x - 1$;

d) $f: \{-1, 1, 3\} \to \{1, 3, 7\}, f(x) = x + 2$.

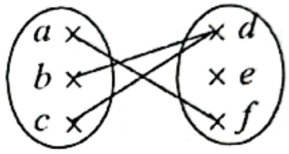
2. Care dintre diagramele de mai jos indică funcții ?

a) 

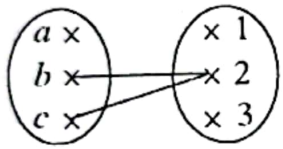
;

b) 

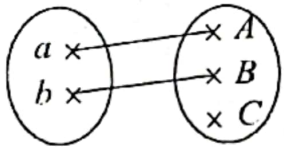
;

c) 

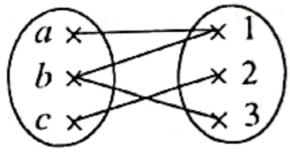
;

d) 

;

e) 

;

f) 

.

3. Stabiliți care dintre următoarele relații definesc o funcție:

a) $f: \mathbf{R} \to (0, \infty), f(x) = -x + 4$;

b) $f: \mathbf{R} \to (0, \infty), f(x) = x^2 + 1$;

c) $f: [-3, 3] \to \{2, 3, 4\}, f(x) = x + 4$;

d) $f: \{-1, 0, 1\} \to \{2, 3, 4\}, f(x) = x + 3$;

e) $f: \mathbf{R} - \{0\} \to \mathbf{R} - \{0\}, f(x) = \frac{1}{x}$;

f) $f: [0, \infty) \to \mathbf{R}^*, f(x) = \sqrt{x}$.

4. Fie funcțiile $f: \{0, 2\} \to \mathbf{R}$ și $h: \{0, 2\} \to \mathbf{R}$ definite prin relațiile $f(x) = 2x$ și $h(x) = x^2$. Sunt cele două funcții egale ?

5. Determinați domeniile maxime de definiție ale funcțiilor definite prin formulele următoare:

a) $f(x) = \frac{x}{2} - 1$;

b) $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x - 2}$;

c) $f(x) = \sqrt{x + 2}$;

d) $f(x) = \frac{1}{x^2 + x + 1}$;

e) $f(x) = \frac{|x - 1|}{|x| - 4} + x$.

6. Să se calculeze $f(-1), f(0), f(1), f(2)$ dacă:

a) $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) = x + 1$;

b) $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) = x^2 - 1$;

c) $f: \mathbf{R} - \{3\} \to \mathbf{R}, f(x) = \frac{1}{x - 3}$;

d) $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) = |x|$.

Scanned with OKEN Scanner

7. Explicitați funcțiile $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ și $h: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$
$f(x) = \max(x-1, 2x+3)$, $h(x) = \min(x, -2x+2)$.

8. Să se expliciteze funcțiile $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, date prin formulele:
a) $f(x) = \max(2x+1, x-1)$; b) $f(x) = |x-1| + |x+2|$.

9. Studiați monotonia următoarelor funcții:
a) $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) = 2x+7$; b) $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) = -x+5$;
c) $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) = 3x+m, m \in \mathbf{R}$; d) $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) = (m-1)x+5, m \in \mathbf{R}$.

10. Să se reprezinte grafic funcțiile:
a) $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) = -x+1$; b) $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) = 2x+1$;
c) $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) = \frac{x}{3}+1$; d) $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) = -\frac{x}{2}-2$.

11. Să se reprezinte grafic funcțiile:
a) $f: (-\infty, 2] \to \mathbf{R}, f(x) = 2x+3$; b) $f: (-1, \infty) \to \mathbf{R}, f(x) = x$;
c) $f: (0, \infty) \to \mathbf{R}, f(x) = \frac{x-1}{3}$; d) $f: (-\infty, 4] \to \mathbf{R}, f(x) = \frac{x}{4}$.

12. Să se reprezinte grafic funcțiile:
a) $f: [-4, 4] \to \mathbf{R}, f(x) = -3x+1$; b) $f: (0, 5) \to \mathbf{R}, f(x) = \frac{x}{4}$;
c) $f: (-3, 2] \to \mathbf{R}, f(x) = \frac{x}{3} - \frac{1}{2}$; d) $f: [0, 2) \to \mathbf{R}, f(x) = -3x+3$.

13. Aflați aria figurii obținute prin intersecția graficelor funcțiilor $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = 4$; $g: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $g(x) = 0$ și a dreptelor $x = 4$ și $x = -4$.

14. Se consideră funcția $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definită prin $f(x) = \begin{cases} 2x-1, & x \le 1 \\ 2-3x, & x > 1 \end{cases}$. Aflați $x \in \mathbf{R}$ astfel ca $f(x) + f(-x) = -2$.

15. Să se reprezinte grafic funcțiile:
a) $f: \{-1, 0, 1\} \to \mathbf{R}, f(x) = -x+2$; b) $f: \{-2, 2, 3\} \to \mathbf{R}, f(x) = \frac{x}{6} - 1$;
c) $f: \{0, 1, 3\} \to \mathbf{R}, f(x) = 2(x+2)$; d) $f: \{-2, 2, 4\} \to \mathbf{R}, f(x) = \frac{x}{2} + 1$.

16. Determinați funcția f astfel încât graficul ei să fie segmentul $[AB]$ cu $A(-2, 3)$ și $B(1, 0)$.

17. Să se determine $a \in \mathbf{R}$, știind că graficul funcției
$$f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) = \begin{cases} (a-3)x-3, & x < 4 \\ (a-6)x+a+4, & x \ge 4 \end{cases},$$
conține punctul $M(6, 3)$. Să se reprezinte graficul funcției obținute.

18. Fie funcția liniară $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ cu $f(1-x) + f(2x+5) = -3x-5$, $(\forall) x \in \mathbf{R}$.
a) Să se reprezinte graficul funcției;
b) Să se rezolve în $\mathbf{R}$ inecuația: $f(x) \ge \frac{1}{2}(3x-10) + \frac{3}{4}(x+1) - \frac{3}{2}$.

19. Se dă funcția $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) = 2x + \sqrt{9-6x+x^2} - \sqrt{(x+4)^2}$. Să se găsească coordonatele punctelor de intersecție dintre graficul funcției f și graficul funcției g, unde $g: \mathbf{R} \to \mathbf{R}, g(x) = x-1$.

Scanned with OKEN Scanner

20. Se consideră funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, unde $f(x)=\begin{cases} ax+2, & x<1 \\ \frac{1}{2}x+a, & x\geq 1 \end{cases}$. Să se determine $a\in\mathbf{R}$, așa încât punctul $A(a,3)$ să aparțină graficului funcției f.

21. Să se determine funcția de gradul întâi care verifică condițiile:

$$f(x-1)+f(x-2)=2f(x)-f(1)-1,\ (\forall)x\in\mathbf{R} \text{ și } f(0)=3.$$

Reprezentați grafic funcția și determinați punctul de pe grafic cu coordonatele egale.

22. Fie funcția liniară $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ cu $f(x-1)=2x-6-f(-1),\ (\forall)x\in\mathbf{R}$.

a) Determinați funcția f.

b) Stabiliți dacă $A(0,-7)$, $B(2,3)$, $C(2,-3)$ aparțin graficului funcției f.

c) Reprezentați grafic funcția $g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $g(x)=f(|x|)$.

23. a) Să se determine funcția $h:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ știind că $h(x)=\begin{cases} f(x), & x\leq 1 \\ g(x), & x>1 \end{cases}$, unde $f(x-2)=x+2-2f(-1)$, $g(x)=a-x$, $a\in\mathbf{R}$ și graficul funcției g trece prin $A(2,2)$;

b) Să se reprezinte graficul funcției h.

24. Se consideră funcția $f:D\to\mathbf{R}$, $f(x)=\sqrt{2}x+\sqrt{6}$, unde

$$D=\left\{\sqrt{2},-\sqrt{3},-1,\sqrt{2}-\sqrt{3},1-\sqrt{3}\right\}.$$

a) Determinați: $E=\left\{f\left(\sqrt{2}\right),f\left(-\sqrt{3}\right),f(-1),f\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right),f\left(1-\sqrt{3}\right)\right\}$.

b) Stabiliți dacă $E\cap\mathbf{Q}=\varnothing$ sau $E-\mathbf{Q}=\varnothing$.

25. Fie $f:[0,4]\to\mathbf{R}$, $n\in\mathbf{N}$, $f(x)=(-1)^{[x]}+(-1)^{2[x]}+\ldots+(-1)^{n[x]}$, unde $[x]$ reprezintă *partea întreagă* a lui x. a) Să se reprezinte grafic funcția pentru $n=3$.

b) Să se determine mulțimea valorilor funcției.

26. Se dau funcțiile $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, unde $f(x)=ax+b$ și $g(x)=5-4x$. Să se afle mulțimile: $A=\{x\,|\,f(x)>g(x)\}$ și $B=\{g(x)\,|\,x\in[-1,5]\}$.

27. a) Să se reprezinte grafic funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=\begin{cases} mx-3, & x\leq -2 \\ m, & x\in(-2,1] \\ -x+2, & x\geq 1 \end{cases}$, unde $m\in\mathbf{R}$, știind că $A(-3,3)\in G_f$.

b) Să se determine punctele graficului care au coordonatele egale.

28. Punctele $A(-1,0)$ și $B\left(m^2+1,-3\right)$, $m\in\mathbf{R}$ aparțin graficului unei funcții liniare $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$. a) Stabiliți dacă f este crescătoare, descrescătoare sau constantă;

b) Reprezentați grafic funcția

$$g:\mathbf{R}-\{0\}\to\mathbf{R},\ g(x)=\begin{cases} -x-1, & x\leq -2 \\ \frac{|x|}{|-x|}, & x>-2 \end{cases},\ x\neq 0.$$

Scanned with OKEN Scanner

29. Fie $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ care verifică $f(x-2) = 3x - 7 - f(1)$, $(\forall) x \in \mathbf{R}$. Care din punctele următoare aparțin graficului funcției date: $A(0, -2)$, $B(1, -1)$, $C(2, 4)$, $D\left(\frac{2}{3}, 0\right)$?

30. Fie $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^2 - 3x$. Rezolvați în $\mathbf{R}$: $4f(x-2) + 10 \geq f(2x+1)$.

31. Să se reprezinte grafic funcția: $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \begin{cases} 2x+5, & x \leq -1 \\ 3, & x \in (-1, 2] \\ -3x+9, & x > 2 \end{cases}$ și să se rezolve în $\mathbf{R}$ inecuația: $f(x-1990) + 1989 f(-x+1990) \geq 5970$.

32. Fie $f: \mathbf{R} - \{3\} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{2x-1}{3-x}$. a) Să se determine $x \in \mathbf{N}$ pentru care $f(x) \in \mathbf{Z}$. b) Să se determine $x \in \mathbf{R}$ pentru care $|f(x)| \leq 1$.

33. Stabiliți domeniul maxim de definiție și reprezentați graficul funcției definită prin formula

$$f(x) = \frac{2x^2 - 2x - 12}{|x+2| \cdot \sqrt{x^2 - 6x + 9}}.$$

34. Fie funcția $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ cu $f(x-4) = ax$ pentru orice $x \in \mathbf{R}$, unde $a \in \mathbf{R}$.

a) Să se determine f.

b) Să se afle a dacă $A\left(1, \frac{a-9}{2}\right)$ se află pe graficul lui f.

c) Pentru a determinat anterior, să se rezolve în $\mathbf{R}$, inecuația $\frac{f(x)}{2 - f(x)} \geq 1$.

35. Fie funcția $f: \{0, 1, 2, \ldots, 100\} \to \{-1, 0, 1\}$ și numărul real $A = f(0) - f(1) + f(2) - f(3) + \ldots + f(98) - f(99) + f(100)$. a) Arătați că $|A| \leq 101$. b) Dacă $f(x) \neq 0$, $(\forall) x \in \{0, 1, 2, \ldots, 100\}$, putem avea $A = 0$?

*

* *

Scanned with OKEN Scanner

CAP. IV. • POLINOAME •

1. a) Pentru ce valori ale lui $a \in \mathbf{R}$ polinomul $P(X) = aX^3 + 2X - 10$ are gradul 3 ? b) Ce valori poate avea gradul polinomului $Q(X) = aX^{20} - (a-1)X^{18} + 2X - 5$? c) Discutați, în funcție de a, gradul polinomului $R(X) = \left(a^2 - 1\right)X^4 + (a+1)X^2 + aX + 1$.

2. Considerăm polinomul $P(X) = X(X-1)(X-2)\ldots(X-100$. a) Ce grad are polinomul ? b) Calculați $P(50)$.

3. Aflați valorile lui $a, b, c, d \in \mathbf{R}$, știind că polinoamele $P(X) = aX^4 + bX^3 + cX^2 + dX + 1$ și $Q(X) = bX^4 - cX^3 + dX^2 - X + 1$ sunt egale.

4. Pentru ce valori ale lui $a \in \mathbf{R}$, polinoamele $P(X) = (a-2)X^3 + aX^2 + 2X - 1$ și $Q(X) = \left(4 - a^2\right)X^3 + X^2$ au același grad ?

5. Calculați $E(a)$ unde $a = \frac{\sqrt{5+\sqrt{3}}}{2} + \frac{\sqrt{5-\sqrt{3}}}{2}$ și $E(X) = X^4 - 10X^2 + 5$.

6. Considerăm polinoamele $P(X) = X^2 + aX + 1$ și $Q(X) = X^2 + bX + 1$. Aflați valorile lui a și b reale cunoscând că $P(1) = Q(2)$ și $P(2) = Q(-1)$.

7. Considerăm mulțimea $A = \left\{1, -1, 2, -2, 3, -3, \sqrt{2}, -\sqrt{2}, \sqrt{3}, -\sqrt{3}\right\}$ și polinomul $P(X) = X^4 - 3X^2 + 2$. Determinați elementele mulțimii $B = \{a \in A \mid P(a) = 0\}$.

8. Fie $P(X) = X^2 - X + 1$. Demonstrați că $P(\alpha) = P(1-\alpha)$, $(\forall)\alpha \in \mathbf{R}$.

9. Fie $P(X) = 2X^2 - 2X\left(\sqrt{2} + \sqrt{3}\right) + 5$. Demonstrați că $P(\alpha) > 0$, $(\forall)\alpha \in \mathbf{R}$.

10. Fie polinoamele $P(X) = aX^5 + bX^3 + cX$ și $Q(X) = mX^4 + nX^2 + p$. Arătați că $P(-\alpha) = -P(\alpha)$, $(\forall)\alpha \in \mathbf{R}$ și $Q(-\beta) = Q(\beta)$, $(\forall)\beta \in \mathbf{R}$.

11. Considerăm polinomul $P(X) = a_{10}X^{10} + a_9X^9 + \ldots + a_2X^2 + a_1X + a_0$. Demonstrați că există două polinoame $Q_1(X)$ și $Q_2(X)$ cu proprietățile: $P(X) = Q_1(X) + Q_2(X)$, $Q_1(-\alpha) = -Q_1(\alpha)$, $Q_2(-\alpha) = Q_2(\alpha)$, $(\forall)\alpha \in \mathbf{R}$.

12. Fie polinomul $P(X) = X^4 - X^3 + 2X^2 + 2X - 8$ și numărul real $a = \frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}}} + \frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{3}}}$. a) Demonstrați că $\sqrt{2+\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}$ și $\sqrt{2-\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}$. b) Demonstrați că a este o rădăcină a polinomului $P(X)$.

13. Dacă $P(X) = X^{20} - X^{17} + X^{16} - X^{15} + X^6 - X + 1$, demonstrați că:
a) $P(0) > 0$; b) $P(1) > 0$; c) $P(\alpha) > 0$, $(\forall)\alpha < 0$;
d) $P(\alpha) > 0$, $(\forall)\alpha \in (0, 1)$; e) $P(\alpha) > 0$, $(\forall)\alpha \in (1, \infty)$.

14. Demonstrați că polinoamele: $P(X) = X^{100} - X^{97} + X^{60} - X^{49} + X^{26} - X + 1$, $Q(X) =$

Scanned with OKEN Scanner

$= X^4 - 2X^3 + 3X^2 - 2X + 1$, $T(X) = X^4 - X^3 + X^2 - X + 1$, iau valori strict pozitive pentru orice valoare reală dată lui X.

15. Dacă $P(X) = 2X^{100} + 3X^{15} - 7X^{10} + 1$ și $Q(X) = 2X^{100} - X^{13} + X^2 - X + 2$, precizați gradul fiecăruia dintre polinoamele: a) $P(X) + Q(X)$; b) $P(X) - Q(X)$; c) $P(X) \cdot Q(X)$; d) $P^2(X) + Q^2(X)$; e) $P^2(X) - Q^2(X)$.

16. Fie polinomul: $P(X) = X^7 + X^6 + X^5 + X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$. a) Scrieți sub formă canonică polinomul: $Q(X) = XP(X) - P(X)$. b) Demonstrați că $P(2) = Q(2)$. c) Demonstrați că $P(2) = 2^8 - 1$.

17. Determinați polinoamele $P(X)$ și $Q(X)$ știind că: $P(X) + Q(X) = (X + 1)(X + 3)$, $P(X) - Q(X) = (X - 1)(X - 3)$.

18. Fie polinomul $P(X) = X^2 - 2X + 3$ și numerele a, b cu proprietatea $a \neq b$ și $P(a) = P(b)$. Demonstrați că $a + b = 2$.

19. Calculați: a) $\left[(X-1)(X+1)\left(X^2+1\right)+1\right] : X^2$;

b) $\left[\left(X^2 - X + 1\right)\left(X^2 + X + 1\right) + X^2\right] : \left(X^2 + 1\right)$.

20. Demonstrați că: a) $(X-a)\left(X^2 + aX + a^2\right) = X^3 - a^3$;

b) $(X-a)\left(X^3 + aX^2 + a^2X + a^3\right) = X^4 - a^4$;

c) $(X-a)\left(X^4 + X^3a + X^2a^2 + Xa^3 + a^4\right) = X^5 - a^5$;

d) $(X-a)\left(X^{n-1} + X^{n-2}a + \ldots + Xa^{n-2} + a^{n-1}\right) = X^n - a^n$, $n \in \mathbf{N}^*$.

21. Demonstrați că: a) $(X+a)\left(X^2 - Xa + a^2\right) = X^3 + a^3$;

b) $(X+a)\left(X^4 - X^3a + X^2a^2 - Xa^3 + a^4\right) = X^5 + a^5$;

c) $(X+a)\left(X^6 - X^5a + X^4a^2 - X^3a^3 + X^2a^4 - Xa^5 + a^6\right) = X^7 + a^7$;

d) $(X+a)\left(X^{2n} - X^{2n-1}a + X^{2n-2}a^2 - \ldots - Xa^{2n-1} + a^{2n}\right) = X^{2n+1} + a^{2n+1}$, $n \in \mathbf{N}^*$.

22. Calculați: $(X-1)(X+1)\left(X^2 - X\sqrt{2} + 1\right)\left(X^2 + X\sqrt{2} + 1\right)\left(X^2 + 1\right)$.

23. Fie polinoamele: $P(X) = \left(X^2 - 1\right)\left(X^2 - X + 1\right)\left(X^2 - X\sqrt{3} + 1\right)$; $Q(X) = \left(X^2 + 1\right)\left(X^2 + X + 1\right)\left(X^2 + X\sqrt{3} + 1\right)$; $T(X) = P(X)Q(X) + 1$. a) Arătați că 0 este rădăcină a polinomului $T(X)$. b) Scrieți polinomul $T(X)$ sub formă canonică.

24. Efectuați împărțirile: a) $\left(2X^3 - X^2 - 1\right) : \left(2X^2 + X + 1\right)$;

b) $\left(X^7 - 128\right) : (X - 2)$; c) $\left(X^8 + X^4 + 1\right) : \left(X^4 - X^2 + 1\right)$.

25. Demonstrați că în cazul fiecăreia dintre împărțirile de mai jos, restul este zero și aflați câtul:

Scanned with OKEN Scanner

a) $\left(X^4+3X^2-2X+3\right):\left(X^2-X+1\right)$;

b) $\left(X^5+X^4-2X^3+2X-1\right):\left(X^2+X-1\right)$;

c) $\left(X^9-X^7+3X^6-2X^4+X^3+3X+3\right):\left(X^6-X^4+X+1\right)$.

26. a) Câtul unei împărțiri este $2X+1$, restul este X^2, iar împărțitorul este X^3. Aflați deîmpărțitul. b) Deîmpărțitul este X^6+X^2+1, câtul este X^3-1, iar restul este X^2+2. Aflați împărțitorul.

27. Împărțind polinomul X^3+2X^2-X+5 la un polinom necunoscut s-a obținut câtul $X+3$ și restul $R(X)$. Dacă $R(0)=2$ și $R(-2)=0$, aflați împărțitorul.

28. Împărțind polinomul $P(X)$ la polinomul $Q(X)$ s-a obținut cătul X^3-8 și restul $2X^2-X-6$. Calculați $P(2)$.

29. Împărțind polinomul $P(X)$ la X^4-4 s-a obținut restul $X^2-X\left(\sqrt{2}+1\right)+\sqrt{2}$. Demonstrați că $\sqrt{2}$ este o rădăcină a polinomului $P(X)$.

30. Fie $P(X)=X^2+X\sqrt{2}+X$ și $Q(X)=X\sqrt{2}-X+1$. Demonstrați că $P(X)$ se divide cu $Q(X)$ și aflați câtul.

31. Fie polinomul $P(X)=aX^5-X^3+X^2+X+1$. Aflați valoarea lui a știind că polinomul se divide (*pe rând*) cu: a) $X-1$; b) $X+1$; c) $2+X$; d) $2-X$.

32. Considerăm polinomul $P(X)=X^4+X^3+aX+b$. Aflați valorile lui a și b cunoscând că polinomul dă restul 2 la împărțirea cu $X+1$ și restul 7 la împărțirea cu $X+2$.

33. Determinați valorile parametrilor m și n astfel încât polinomul $P(X)=mX^4+2X^3+3X^2-X+n$ să se dividă cu X^2-X.

34. Aflați valorile parametrilor a și b astfel încât polinomul $P(X)=aX^4+bX^3+X+1$ să fie divizibil cu X^2-1.

35. Calculați valorile parametrilor a și b cunoscând că polinomul $Q(X)=X^6+aX^5+bX^4-3X^2+X+10$ se divide cu $2-X$ și dă restul 60 la împărțirea cu $X+2$.

36. Aflați valorile parametrilor m și n știind că polinomul $P(X)=mX^4+nX^3+X^2-X+2$ se divide cu $X+1$ și dă resturi egale la împărțirea prin X și $X-1$.

37. Dacă polinomul $P(X)$ dă restul 2 la împărțirea cu $X-1$ și restul 32 la împărțirea cu $X+1$ aflați restul pe care îl dă $P(X)$ la împărțirea cu X^2-1.

38. Cunoscând că polinomul $P(X)=X^4+X^3+aX+b$ se divide cu X^2+X+2, determinați valorile lui a și b.

39. Fie polinomul $P(X)=X^4+4X^3+6X^2+4X+1$. a) Aflați restul pe care $P(X)$ îl dă la împărțirea prin $X+1$. b) Descompuneți polinomul în factori.

40. Fie polinoamele: $P(X)=X^3-3X^2+3X-2$; $Q(X)=X^4+2X^3+3X^2+2X$.
a) Demonstrați că $P(2)=Q(-1)$. b) Descompuneți polinoamele în factori.

41. Se consideră numărul: $a=\dfrac{1}{\sqrt{3+\sqrt{5}}}+\dfrac{1}{\sqrt{3-\sqrt{5}}}$. a) Demonstrați că a^2 este număr

Scanned with OKEN Scanner

rațional, iar a este număr irațional. b) Pentru ce valoare a lui m, $P(X)=16X^4+8X^2+m$ se divide cu $X-a$?

42. Fie polinomul $P(X)=100X^{100}+99X^{99}+\ldots+2X^2+X$. Aflați restul pe care $P(X)$ îl dă la împărțirea cu: a) X; b) $X-1$; c) $X+1$; d) X^2-1.

43. Dacă $P(X+1)=X^3-X^2+2X-5$, aflați restul împărțirii lui $P(X)$ la $X-2$.

44. Fie $P(X)$ un polinom cu proprietatea $P(1-X)=X^3+X+1$. Aflați restul pe care $P(X)$ îl dă la împărțirea cu $X-a$, dacă $a=\dfrac{0,(1)+0,(2)+0,(3)+0,(4)}{0,(1)}$.

45. Fie $P(X)$ un polinom cu proprietatea: $XP(X)+(X+1)P(X+1)=2X^4+4X^3+6X^2+4X+1$. Calculați restul pe care $P(X)$ îl dă la împărțirea cu: a) $X-1$; b) $X+1$.

46. Descompuneți în factori polinoamele:

a) X^2-a^2; b) X^2-1; c) $X^2-\frac{1}{9}$;

d) $X^2-0,01$; e) $4X^2-\frac{1}{169}$; f) X^2-2; g) $9X^2-5$;

h) $25-X^2$; i) $0,04-X^2$; k) $\frac{1}{10000}-X^2$; l) X^4-a^4;

m) b^4-X^4; n) X^4-16; p) $81-X^4$; q) $X^4-\frac{1}{64}$.

47. Calculați: a) $\left(X^2-4\right):(X+2)$; b) $\left(X^2-9\right):(3-X)$; c) $\left(X^2-0,04\right):(X-0,2)$;

d) $\left(X^2-0,(1)\right):(X+0,(3))$; e) $\left(X^2-0,(4)\right):(X-0,(6))$.

48. Descompuneți în factori: a) $(2X+1)^2-(X+2)^2$; b) $4X^2+4X+1-a^2$;

c) $\left(X^2+X-1\right)^2-\left(X^2-X+1\right)^2$; d) $\left(X^2-a\right)^2-(X-b)^2$.

49. Descompuneți în factori:

a) X^2-6X+9;

b) X^2-6X+8; c) X^3+2X^2+X;

d) $X^4+4X^3+4X^2-1$; e) $4-X^4+2X^3-X^2$;

f) $X^2+6X+(3-a)(3+a)$; g) $X^2-4X+(2+a)(2-a)$;

h) $X^6-2X^4+X^2-4$; i) $X^4+2X^3+X^2-25$;

j) $X^2-4\left(aX-a^2+1\right)$; k) $\left(X^2+4X+1\right)^2-9$;

l) $\left(X^2+2X\right)^2-1$; m) $\left(X^4-2X^2\right)^2-1$;

n) $\left(X^4+4X^3\right)^2-16$; p) $(1-X)(1+X)+a(2X-a)$.

50. Descompuneți în factori polinoamele:

a) X^3-a^3; b) X^3-8; c) $X^3-0,001$;

d) $27-8X^3$; e) $1000X^3-\frac{1}{8}$; f) $125X^3-\frac{1}{27}$.

51. Descompuneți în factori polinoamele:

a) X^3+a^3; b) X^3+125; c) $8X^3+1$;

d) $X^3+0,001$; e) $X^3+0,008$; f) $\frac{1}{64}X^3+\frac{1}{125}$.

52. Descompuneți în factori polinoamele:
a) X^5+X^4+X+1; b) X^3-X^2+X-1;
c) $X^4+2X^3-8X-16$; d) $X^5-X^4+X^3+X^2-X+1$;
e) $X^7+3X^6+X^5+3X^4-X-3$; f) X^3+2X^2-X-2;
g) X^3-2X^2-X+2; h) X^3+3X^2+3X+9;
i) X^3-3X^2-3X+9; j) $X^4+aX^3+X^2+aX$;
k) $X^5-bX^4+X^3-bX^2+X-b$; l) $aX^5+bX^4-aX^3-bX^2-aX-b$.

53. Descompuneți în factori: a) $X^2+(a+b)X+ab$;
b) $X^2-(a+b)X+ab$; c) $X^2+(a-b)X-ab$.

54. Descompuneți în factori următoarele polinoame:
a) $X^2+7X+12$; b) $X^2+9X+20$; c) $X^2-10X+21$;
d) $X^2-11X+30$; e) X^2-7X-8; f) X^2+7X-8;
g) X^2-3X+2; h) $-X^2-3X-2$; i) X^2+4X+3;
j) $-X^2+4X-3$; k) $X^2+13X+30$; l) $X^2-14X+40$;
m) $X^2+10X+21$; n) $-X^2-9X-18$; p) X^2+5X+4;
q) $-X^2-5X-4$; r) $X^2-(100+a)X+100a$; s) $X^2+(1997-n)X-1997n$.

55. Descompuneți următoarele polinoame în factori: a) $X^2+X+X\sqrt{2}+\sqrt{2}$;
b) $X^2-X\sqrt{5}+X-\sqrt{5}$; c) $X^2-X\sqrt{2}-X\sqrt{3}+\sqrt{6}$;
d) $X^2-7+X+\sqrt{7}$; e) $X^2-3+X-\sqrt{3}$.

56. Fie polinomul: $P(X)=X^4-4X^2-32$. a) Scrieți polinomul $P(X)$ ca produs de două polinoame cu coeficienți întregi. b) Aflați valorile lui $a\in\mathbf{Z}$ pentru care $P(a)$ este un număr natural prim.

57. Descompuneți în factori polinoamele: a) X^4+15X^2-16;
b) X^4-X^2-4X-4; c) $X^2(X-5)^2-36X+180$.

58. Descompuneți în factori polinoamele:
a) $X(X+2)+(1-\alpha)(1+\alpha)$; b) $3X(X+1)+X^3+2$;
c) $X(X-4)+(2-\beta)(2+\beta)$; d) $\left(X^2+1\right)\left(a^2+1\right)-(aX+1)^2$;
e) $(X+a)^3-X^3-a^3$; f) $(X-b)^3-X^3+b^3$.

59. Aflați polinomul de gradul doi $P(X)$, care divide polinomul $Q(X)=X^3+3X^2+2X$, știind că $P(0)=10$.

60. Fie polinomul: $P(X)=X^5+X^4-2X^3-2X^2+X+1$. a) Descompuneți polinomul în factori ireductibili. b) Găsiți toate polinoamele $Q(X)$ de gradul doi care divid $P(X)$ și au proprietatea $|Q(0)|=2$.

61. Descompuneți în factori polinoamele: a) $P(X)=\left(X^2+1\right)\left(X^2+3\right)+1$;

b) $Q(X)=\left(X^2-X+1\right)\left(X^2-X+3\right)+1$;

Scanned with OKEN Scanner

c) $T(X)=\left(X^3+2X+5\right)\left(X^3+2X+7\right)+1$.

62. Fie polinomul: $P(X)=X(X+1)\left(X^2+X+2\right)+1$. a) Descompuneți polinomul în factori. b) Demonstrați că $P(\alpha)\geq\frac{9}{16}$ pentru orice $\alpha\in\mathbf{R}$. În ce caz se obține egalitatea ?

63. Descompuneți în factori polinoamele: a) $P(X)=X^3+2\sqrt{3}X^2+4X+\sqrt{3}$;

b) $Q(X)=X^3+2\sqrt{3}X^2+3X+\sqrt{3}-1$.

64. Fie polinomul $P(X)=X^4+2X^3+2X^2+2X+1$. a) Descompuneți polinomul în factori. b) Arătați că: $P(a)\geq 0,(\forall)a\in\mathbf{R}$. c) Aflați valorile lui $a\in\mathbf{Z}$ pentru care $P(a)$ este pătrat perfect.

65. Descompuneți în factori polinoamele:

a) $P(X)=(X-3)(X-1)(X+1)(X+3)+16$;

b) $Q(X)=X(X+1)(X+2)(x+3)+1$;

c) $S(X)=\left(X-3\sqrt{2}\right)\left(X-\sqrt{2}\right)\left(X+\sqrt{2}\right)\left(X+3\sqrt{2}\right)+64$.

66. Fie polinomul $P(X)=X^3+2aX^2-a^3$. Demonstrați că $-a$ este o rădăcină a polinomului și apoi descompuneți polinomul în factori.

67. Demonstrați că polinomul $Q(X)=X^3+X^2(3a+1)+aX(3a+2)+a^3+a^2$ admite rădăcina $-a-1$ și apoi descompuneți polinomul în factori.

68. Fie polinomul $P(X)=X^3+(a+b+c)X^2+(ab+ac+bc)X+abc$. a) Calculați $P(-a)$, $P(-b)$, $P(-c$. b) Descompuneți polinomul în factori ireductibili.

69. Fie polinomul $P(X)=X^3-(a+b+c)X^2+(ab+ac+bc)X-abc$. a) Calculați $P(a)$, $P(b)$, $P(c$. b) Descompuneți polinomul în factori ireductibili.

70. Considerăm polinomul $P(X)=X^3-10X^2+31X-30$. a) Demonstrați că polinomul nu admite rădăcini negative. b) Notăm cu D_{30} mulțimea divizorilor întregi ai numărului 30. Care dintre elementele mulțimii D_{30} sunt rădăcini ale polinomului ? c) Descompuneți polinomul în produs de factori ireductibili.

71. Fie polinomul $P(X)=X^3-6X+9$. a) Calculați $P(-3)$. b) Descompuneți polinomul în factori. c) Demonstrați că dacă $\alpha\in(-3,\infty)$, $P(\alpha)>0$, iar dacă $\alpha\in(-\infty,-3)$, $P(\alpha)<0$.

72. Determinați numerele reale a, b, c, d cunoscând că $\left(X^2-3X+a\right)\left(bX^2+cX+d\right)=$

$=X^4-10X^2+9X-2$.

73. Determinați valorile reale ale lui a, b, c așa încât :

$$X^4+X^2+a=\left(X^2+aX+1\right)\left(X^2+bX+c\right).$$

74. Considerăm polinomul $P(X)=(X+1)^5-X^5-1$. a) Demonstrați că există a, b, c, d, $e\in\mathbf{R}$ așa încât $P(X)=aX^4+bX^3+cX^2+dX+e$. b) Calculați $P(0)$, $P(1)$, $P(-1)$, $P(2)$, $P(-2)$. c) Determinați coeficienții a, b, c, d, e. d) Descompuneți în factori polinomul.

75. Considerăm polinoamele $P(X)$ și $Q(X)$ cu proprietățile: $P(-2)+P(6)=-8$; $P(X)=$

$=Q^2(X)+(X-2)Q(X)$. a) Calculați $Q(-2)$ și $Q(6)$. b) Aflați restul pe care îl dă

$Q(X)$ la împărțirea cu $X^2 - 4X - 12$.

76. Fie polinomul $P(X) = 1 + X + X^2 + ... + X^n$, $n \in \mathbf{N}^*$. a) Pentru ce valori ale lui n, polinomul $P(X)$ se divide prin $X + 1$? b) Demonstrați că pentru orice $n \in \mathbf{N}^*$, $P(1) + P(-1)$ este număr par. c) Aflați n știind că $P(1) + P(-1) = 1000$.

77. Aflați cel mai mare divizor comun și cel mai mic multiplu comun al polinoamelor:

$$P(X) = X^3(X+1)^2(X-1)^5; \quad Q(X) = X^2(X+1)(X+2).$$

78. Descompuneți în factori polinoamele $P(X) = X^6 - 1$, $Q(X) = X^4 + X^2 + 1$ și apoi aflați cel mai mare divizor comun și cel mai mic multiplu comun.

79. Aflați cel mai mare divizor comun și cel mai mic multiplu comun al polinoamelor:

$$P(X) = X^4 + 2X^3 - 2X - 1; Q(X) = X^5 + 3X^4 + 2X^3 - 2X^2 - 3X - 1.$$

80. Demonstrați că $P(X) = X^3 - X$ și $Q(X) = X^8 + X^4 + 1$ sunt prime între ele.

81. Aflați valorile lui a și b cunoscând că cel mai mare divizor comun al polinoamelor $P(X) = X^4 + X^3 + X^2 + X + a$ și $Q(X) = X^2 + X + b$ este $X - 1$.

82. Fie $P(X) = X^n(X+1)^m(X+2)^p$, $Q(X) = X^m(X+1)^n(X+3)^q$, unde n, m, $p, q \in \mathbf{N}^*$. Cunoscând că cel mai mare divizor comun al lor este $X^n(X+1)^n$, aflați cel mai mic multiplu comun.

83. Găsiți polinoamele $P(X)$ și $Q(X)$ cunoscând că cel mai mare divizor comun al lor este $X^2 + 4$, cel mai mic multiplu comun este $X^4 + 3X^2 - 4$, $P(1) = 10$ și $Q(-1) = 20$.

84. Dacă $P(X)$ este un polinom de grad n precizați gradul fiecăruia dintre polinoamele:

a) $Q(X) = X^2 \cdot P(X)$; b) $T(X) = (P(X))^2$; c) $S(X) = P(P(X))$.

85. Găsiți toate polinoamele cu proprietățile: a) $P(P(X)) = X$;

b) $R(R(X)) = X + 2$; c) $Q(Q(X)) = -X + k$, $k \in \mathbf{R}$.

86. Fie $P(X)$ un polinom cu proprietatea $P(X)P(X+1) = X^4 + 2X^3 + X^2$. a) Aflați gradul polinomului $P(X)$. b) Arătați că $P(0)P(1) = P(-1)P(0)$. c) Determinați $P(0)$. d) Găsiți polinoamele $P(X)$ cu proprietatea din enunț.

87. Pentru ce valori ale lui $a \in \mathbf{Z}$, polinomul $P(X) = X^3 - (a+1)X + 2a$ admite cel puțin o rădăcină întreagă?

88. Fie $P(X)$ un polinom cu coeficienți întregi. Demonstrați că oricare ar fi numerele întregi m și n, avem: $(m - n) \mid P(m) - P(n)$.

89. Fie $P(X)$ și $Q(X)$ două polinoame cu proprietățile: (i) grad $(P(X) + Q(X)) = 2$; (ii) $4 < \text{grad}(P(X)Q(X)) < 8$. a) Demonstrați că $P(X)$ și $Q(X)$ au același grad. b) Determinați gradul lui $P(X)Q(X)$. c) Aflați câtul împărțirii lui $P(X)$ la $Q(X)$.

90. Fie $P(X)$ un polinom cu coeficienți întregi cu proprietatea $P(1) = P(2) = 100$. Există $a \in \mathbf{Z}$ așa încât $P(a) = 1995$?

91. Fie $P(X)$ un polinom cu coeficienți întregi care admite trei rădăcini, numere întregi consecutive. Demonstrați că pentru orice $a \in \mathbf{Z}$, $P(a)$ se divide cu 6.

92. Fie $P(X)$ un polinom cu proprietățile $P(P(x)) + P(x) = X^4 - 2X^3 + X^2$ și $P(1) = 0$. a) Aflați $P(0)$. b) Precizați gradul lui $P(X)$. c) Determinați polinomul.

*

* *

Scanned with OKEN Scanner

CAP. V. • FRACȚII RAȚIONALE •

1. Simplificați fracțiile: a) $\frac{X^2-1}{X^2+2X+1}$; b) $\frac{1-X^2}{X^2+2X+1}$; c) $\frac{X^6+X^4+X^2+1}{X^3+X^2+X+1}$; d) $\frac{X^2+4X+3}{X^2+5X+4}$; e) $\frac{X^3-1}{X^4+X^2+1}$; f) $\frac{X^2-15X+36}{X^3-3X^2-2X+6}$. Calculați valoarea fiecăreia dintre fracțiile de mai sus în 1 și în 0.

2. Simplificați fracțiile:

a) $\frac{(X+4)^2-1}{X^3+125}$; b) $\frac{(X-2)^3+27}{X^3+1}$; c) $\frac{(X-5)^2-4}{27-X^3}$; d) $\frac{(2X-1)^2-X^2}{1-X^3}$.

3. Considerăm polinoamele: $P(X)=X^2-2X-15$; $Q(X)=X^2+6X+9$; $T(X)=X^2-10X+25$. a) Demonstrați că: $P^2(X)=Q(X)T(X)$. b) Simplificați fracția: $E(X)=\frac{T(X)-P(X)}{T(X)+P(X)}$. c) Aflați valorile lui $a\in\mathbf{R}$ cu proprietatea $E(a)<0$.

4. Simplificați fracțiile: a) $\frac{X^3+1}{X^4-X^3+2X^2-X+1}$; b) $\frac{1+X^3}{X^5-X^4+2X^2-2X+1}$; c) $\frac{X^3-X^2-X-2}{X^2-3X+2}$; d) $\frac{X^2+4X+3}{X^5+X^4-X^2+1}$.

5. Fie fracția: $F(X)=\frac{X^5-X^4+2X^3-2X^2+X-1}{X^5-X^4+3X^3-3X^2+2X-2}$. a) Pentru ce valori ale lui $a\in\mathbf{R}$ este definită $F(a)$? b) Simplificați fracția. c) Există $a\in\mathbf{R}$ așa încât $F(a)$ să fie număr întreg ?

6. Simplificați fracțiile:

a) $\frac{X^2+4X-21}{2X^2-3X-9}$; b) $\frac{Y^2-4Y+3}{3Y^2-10Y+7}$; c) $\frac{X^4+4X^3+8X^2+20X+15}{X^4-25}$.

7. Considerăm fracția: $F(X)=\frac{2X^2-10X+8}{3X^2-10X+7}$. a) Pentru care numere $\alpha\in\mathbf{R}$, $F(\alpha)$ nu este definită ? b) Simplificați fracția. c) Aflați valorile reale ale lui a cu proprietatea $F(a)>\frac{2}{3}$.

8. Simplificați fracțiile: a) $E(X)=\frac{2X^2-3X\sqrt{2}+2}{\sqrt{2}X^3-\left(3-\sqrt{2}\right)X(X+1)+\sqrt{2}}$;

b) $F(X)=\frac{X^4-7X^2+10}{X^2+X\left(\sqrt{2}+\sqrt{5}\right)+\sqrt{10}}$.

9. Aflați valorile lui $a\in\mathbf{R}$ pentru care fracția $\frac{X^3+2X^2-aX+1}{X^2+3X-4}$ se poate simplifica.

10. Aflați valorile lui a și b reale pentru care fracția $\frac{X^2+1}{X^4+X^3+2X^2+aX+b}$ se poate simplifica.

Scanned with OKEN Scanner

11. Scrieți sub formă de fracții ireductibile:

a) $\frac{1}{X-1}+\frac{1}{X+1}$;

b) $\frac{2}{X-3}+\frac{2}{3-X}$;

c) $\frac{4}{X^2-4}+\frac{1}{X-2}+\frac{1}{X+2}$;

d) $\frac{1}{X^2-9}+\frac{1}{3+X}+\frac{1}{3-X}$;

e) $\frac{1}{X-1}-\frac{3X}{X^3-1}$;

f) $\frac{X^2+2X+4}{X+2}-\frac{X^2-2X+4}{X-2}+\frac{12X^2-48}{X^2-4}$;

g) $\frac{X^6}{X^3-8}-\frac{X^6}{X^3+8}+\frac{64}{8-X^3}+\frac{64}{8+X^3}$;

h) $\frac{X^2-1}{(X+1)^2}-\frac{X^2+1-2X}{X^2-1}+\frac{X}{X+1}-\frac{X^2+X}{X^3+3X^2+3X+1}$;

i) $\frac{\left(X^2-9\right)^2-(X+5)(X-3)^2}{\left(X^2+X-12\right)^2}-\frac{\left(X^2-1\right)^2+9(X+1)^3}{\left(X^2+6X+5\right)^2}$.

12. Fie fracția $F(X)=\frac{\left(X^3-X^2\right)\left(X^2+X+1\right)}{X^7-X^4+X^3-1}$. a) Demonstrați că $F(a)$ există pentru orice $a\in\mathbf{R}-\{1\}$. b) Simplificați fracția. c) Aflați $F(a)$ cunoscând că $a-\frac{1}{a}=1$.

13. Considerăm fracția $E(X)=\frac{X^{100}-X^{99}+\ldots+X^2-X+1}{X^{100}+X^{99}+\ldots+X^2+X+1}$ și numărul real $\alpha=\frac{0,(2)+0,(3)+0,(4)}{\left(1-\sqrt{2}\right)\left(1+\sqrt{2}\right)}$. Calculați $E(\alpha)$.

14. Calculați: a) $\frac{X^2-1}{X+3}\cdot\frac{X^2-9}{X^2+2X+1}$;

b) $\frac{X^2-X+1}{X^3-1}\cdot\frac{X^2+X+1}{X^3+1}$;

c) $\frac{X^2-25}{X+2}\cdot\frac{X^2-4}{2X^2+10X}$;

d) $\frac{16X^2-9}{16X^2-1}\cdot\frac{16X^2+8X+1}{16X^2+24X+9}$;

e) $\frac{X^2+1}{X^2+X}\cdot\frac{X^2+3X+2}{X^2+5X+6}\cdot\frac{X^2+7X+12}{X^2+9X+20}$;

f) $\frac{X^3-3X^2+3X-1}{X^3+3X^2+3X+1}:\frac{X^2-2X+1}{X^2+2X+1}$;

g) $\frac{X^3-1}{X^3+1}:\frac{X^2+X+1}{X^2-X+1}$;

h) $\frac{X^3-64}{X^2-16}\cdot\frac{X^2-6X+9}{X^2+4X+16}:\frac{X^2+2X-15}{4X^2+16X}$.

15. Considerăm fracția $F(X)=\frac{36X^2-169}{6X^2+7X-13}$. a) Aflați numerele reale α pentru care $F(\alpha)$ nu este definită. b) Simplificați fracția $F(X)$. c) Calculați $F(a)$ unde $a=$ $=\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}+\sqrt{2}\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}-\sqrt{2}\right)$.

16. Calculați: a) $\left[\frac{1}{X-1}+\frac{1}{1-X}+\frac{1}{(1-X)^2}+\frac{1}{(X-1)^2}\right]\cdot\left(X^2-1\right)$;

Scanned with OKEN Scanner

b) $\left(\frac{X^2-X+1}{X^3-1}+\frac{1}{1-X}\right)\cdot\left(\frac{1}{X}-1\right)$;

c) $\left(\frac{1}{X^2-4}+\frac{1}{2-X}+\frac{1}{2+X}\right)\cdot\frac{8-X^3}{(X+1)^2+3}$;

d) $\left(\frac{1}{X+\frac{1}{X}}+\frac{1}{X-\frac{1}{X}}\right):\frac{2}{X^2-1}$;

e) $\left(\frac{1+X}{1-X}-\frac{1-X}{1+X}\right):\left[\left(\frac{1+X}{1-X}-1\right)\left(1-\frac{1}{1+X}\right)\right]$;

f) $\left(\frac{X+3}{X^2-4}+\frac{X+5}{X^3+8}\right):\frac{X^2+1}{X^2-2X+4}$;

g) $\left[\frac{X(X+2)}{X^2+3X+2}+\frac{X^2+4X+3}{X(X+3)}\right]:\left(\frac{2X^2+2X+1}{X^3+2X^2+X}\right)$.

17. Scrieți sub formă de fracție rațională:

a) $\frac{2}{4X-X^2}+\left(\frac{1}{X^2-4X}+\frac{2}{16-X^2}+\frac{1}{16+4X}\right)\cdot\left(\frac{X+4}{X-4}\right)^2$;

b) $\left(\frac{X^2}{a^2}-\frac{X}{a}+1\right)\cdot\left(\frac{X^2}{a^2}+\frac{X}{a}+1\right)\cdot\frac{a^4}{X^4+a^2X^2+a^4}$, $a\in\mathbf{R}^*$;

c) $\left(\frac{X-n}{X+n}-\frac{X^3-n^3}{X^3+n^3}\right)\cdot\left(\frac{X-n}{X+n}+\frac{X^2+n^2}{X^2-n^2}\right)$, $n\in\mathbf{R}$.

18. Calculați: a) $\left(\frac{X^2}{X^2-3x+2}+\frac{1}{X-1}+\frac{4}{2-X}\right)^2$;

b) $\left(\frac{1-X}{X^2-5X+6}+\frac{2-X}{4-4X+X^2}-\frac{2}{3-X}\right)^3:\frac{X^2+1}{X^{10}+2}$.

19. Considerăm expresiile: $A(X)=X+\frac{1}{X}$; $B(X)=X^2+\frac{1}{X^2}$; $C(X)=X^3+\frac{1}{X^3}$. Dacă α este un număr real cu proprietatea $A(\alpha)=3$, calculați $B(\alpha)$ și $C(\alpha)$.

20. Scrieți sub formă de fracție rațională:

a) $\frac{X^3-a^3}{2a}\left(\frac{2a}{4-2a-2X+aX}+\frac{2aX+4a}{X^3-aX^2-4X+4a}\right)$;

b) $\frac{1}{X}\left(\frac{a^2-aX}{X+a}\right)^2\cdot\left[\frac{X+a}{(X-a)^2}+\frac{X+a}{aX-a^2}\right]+\frac{X}{X+a}$;

c) $\left(\frac{X+a}{a}-\frac{4X}{X+a}\right)\cdot\left(1+\frac{a+1}{X}+\frac{a}{X^2}\right)\cdot\frac{X^2a}{X^2-a^2}$.

21. Calculați: $\left(1+\frac{1}{X}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{X}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{X^2}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{X^4}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{X^8}\right)+\frac{1}{X^{16}}$.

22. Fie $E(X)=\left[\frac{X^4+X^2+1}{(X^3-1)(X^3+1)}-\frac{1}{X^2+1}\right]\cdot\left[\left(\frac{X+1}{\sqrt{2}}\right)^2-X\right]$. a) Aflați numerele reale a pentru care $E(a)$ există. b) Determinați mulțimile:

Scanned with OKEN Scanner

$$A=\left\{X\in\mathbf{R}\mid E(X)=\tfrac{1}{3}\right\};\quad B=\{n\in\mathbf{Z}\mid E(n)\in\mathbf{Z}\}.$$

23. Calculați: a) $\left[\dfrac{X^5-32}{X^3-8}-\dfrac{2\left(X^3+4X+6\right)}{(X-2)^2+6X}\right]:\dfrac{X^2+2}{X^2+2X+4}$;

b) $\left(\dfrac{X^6}{X^3-1}-\dfrac{X^6}{X^3+1}+\dfrac{1}{X^3+1}+\dfrac{1}{1-X^3}\right):\left[\left(X+\dfrac{1}{X}\right)^2-\dfrac{X^4+1}{X^2}\right]$.

24. Fie $F(X)=\dfrac{\left(X+\frac{1}{X}\right)^6-\left(X^6+\frac{1}{X^6}\right)-2}{\left(X+\frac{1}{X}\right)^3+\left(X^3+\frac{1}{X^3}\right)}$. a) Demonstrați că: $F(X)=3\left(X+\dfrac{1}{X}\right)$.

b) Arătați că: $F(a)\geq 6$, $(\forall)a>0$.

25. Scrieți sub formă de fracție rațională ireductibilă:

a) $\left(1-\dfrac{1}{X}\right)\left(1-\dfrac{1}{X+1}\right)\left(1-\dfrac{1}{X+2}\right)\ldots\left(1-\dfrac{1}{X+10}\right)$;

b) $\left(1+\dfrac{1}{X}\right)\left(1+\dfrac{1}{X+1}\right)\left(1+\dfrac{1}{X+2}\right)\ldots\left(1+\dfrac{1}{X+100}\right)$;

c) $\left(1-\dfrac{1}{X^2}\right)\left(1-\dfrac{1}{(X+1)^2}\right)\ldots\left(1-\dfrac{1}{(X+100)^2}\right)$.

26. Găsiți polinomul $P(X)$ cu proprietatea: $\dfrac{P(X)}{X^2+3X+2}=\dfrac{X^2+2X-3}{X^2+X-2}$.

27. a) Găsiți numerele reale a și b așa încât: $\dfrac{1}{X^2-1}=\dfrac{a}{X-1}+\dfrac{b}{X+1}$;

b) Găsiți numerele reale a, b, c așa încât: $\dfrac{1}{X^3-X}=\dfrac{a}{X-1}+\dfrac{b}{X}+\dfrac{c}{X+1}$.

28. Determinați numerele reale m, n, p așa încât: $\dfrac{X^2+1}{X^3-1}=\dfrac{m}{X-1}+\dfrac{nX+p}{X^2+X+1}$.

29. Scrieți sub formă de fracție rațională ireductibilă:

a) $\dfrac{1}{X^2+X}+\dfrac{1}{X^2+3X+2}+\dfrac{1}{X^2+5X+6}$;

b) $\dfrac{1}{X^2+4X+3}+\dfrac{1}{X^2+8X+15}+\dfrac{1}{X^2+12X+35}+\dfrac{1}{X^2+16X+63}$.

30. Fie expresia: $E(X)=\dfrac{\frac{5X^2-6X+3}{X-1}+4X^2-X+2}{2X+3+\frac{2}{X-1}}+X^2+11$. a) Demonstrați că: $E(X)=X^2+2X+10$. b) Aflați valorile lui $n\in\mathbf{Z}$ pentru care $E(n)$ este pătrat perfect.

31. Scrieți sub formă de fracție rațională ireductibilă:

$$\left(\frac{\frac{1}{X+\sqrt{2}}+\frac{1}{X-\sqrt{2}}}{\frac{1}{X+\sqrt{2}}-\frac{1}{X+\sqrt{2}}}-\frac{\frac{1}{X+\sqrt{2}}-\frac{1}{X-\sqrt{2}}}{\frac{1}{X+\sqrt{2}}+\frac{1}{X-\sqrt{2}}}\right)\cdot\left(\frac{\frac{1}{X+\sqrt{2}}-\frac{1}{X-\sqrt{2}}}{\frac{1}{X+\sqrt{2}}}-\frac{\frac{1}{X+\sqrt{2}}-\frac{1}{X-\sqrt{2}}}{\frac{1}{X-\sqrt{2}}}\right).$$

32. Demonstrați identitatea:

Scanned with OKEN Scanner

$$\left(\frac{X^3-1}{X^3+1}\right)^3+\left(\frac{X^3+1}{X^3-1}\right)^3+3\left(\frac{X^3-1}{X^3+1}+\frac{X^3+1}{X^3-1}\right)=\frac{8\left(X^6+1\right)^3}{\left(X^6-1\right)^3}.$$

33. Calculați: $\left[\frac{\left(\frac{1+X^2}{X}\right)^2+\frac{2+2X^2}{X}-3}{\frac{1}{X}+\frac{1}{X^2}+\frac{1}{X^3}-\frac{4}{X+X^2+X^3}}\right]^2:\left(X^3-1\right)^2.$

34. Fie $F(X)=\frac{10}{X^2+2X+1}-\frac{10}{X^2+3X+1}-\frac{1}{X^2+1}$. Calculați $F(a)$ cunoscând că a este un număr real cu proprietatea: $a+\frac{1}{a}=3$.

35. Se consideră expresia:

$$E(X)=\left(\frac{1}{X^2+5X+6}+\frac{1}{X^2+3X+2}+\frac{2X}{X^2+4X+3}\right)^2:\frac{4}{(X-3)^2+12X}.$$

Determinați mulțimea: $A=\{x\in\mathbf{R}\,|\,E(x)=1\}$.

36. Considerăm fracția: $F(X)=\frac{X^5+X^4+X^3+X^2+X+1}{X^5-X^4+X^3-X^2+X-1}$. a) Pentru ce valori ale lui $\alpha\in\mathbf{R}$, $F(\alpha)$ nu este definită? b) Simplicați fracția. c) Determinați mulțimea valorilor numărului real β pentru care $|F(\beta)|<1$.

37. Aflați valorile lui a, b, c, d așa încât fracția $F(X)=\frac{X^3-6X^2+aX+b}{X^3-X^2+cX+d}$ să se poată simplifica prin $(X-a)^2$ unde $\alpha=\left(4+\sqrt{15}\right)\left(\sqrt{10}-\sqrt{6}\right)\sqrt{4-\sqrt{15}}$.

38. Fie fracția: $F(X)=\frac{X^3-X^2-9X+14}{X^3-6X^2+12X-8}$. a) Simplificați fracția. b) Demonstrați că: $F(a)\le\frac{29}{4}$ pentru orice $a\in\mathbf{R}-\{2\}$.

39. Fie fracția $F(X)=\frac{X^3-6X^2+bX+c}{X^3-bX^2+11X+d}$ și numărul real $a=6\cdot\sqrt{0,69(4)}$. a) Determinați numerele reale b, c, d cunoscând că $F(-1)=1$ și că fracția se simplifică prin $X-a$. b) Demonstrați că $F(\alpha)\ge\frac{7}{8}$, pentru orice $\alpha\in\mathbf{R}-\{1,5\}$.

40. Considerăm fracția $F(X)=\frac{X^3-\frac{X^2}{\sqrt{2}-1}+\frac{X}{\sqrt{2}-1}-\sqrt{2}}{X^3-\frac{X^2}{\sqrt{2}+1}+\frac{X\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}-2\sqrt{2}}$. a) Simplificați fracția. b) Demonstrați că $F(x)<2$, pentru orice $x\in\mathbf{R}-\left\{\sqrt{2}\right\}$. c) Aflați valorile lui $x\in\mathbf{R}$ pentru care $F(x)\in\mathbf{N}$.

41. Fie fracția $F(X)=\frac{X^4-7X^2+7X+3}{X(X+3)}$. a) Determinați valorile întregi ale lui x pentru care $F(x)$ este număr întreg. b) Demonstrați că $F(x)>0$ oricare ar fi $x>0$.

*

* *

Scanned with OKEN Scanner

CAP. VI. • INTRODUCERE ÎN GEOMETRIA ÎN SPAȚIU •

• Puncte • Drepte • Plane •

1. Se dau 12 puncte în spațiu dintre care exact trei puncte sunt coliniare. Aflați numărul dreptelor determinate de aceste puncte.

2. Se dau n puncte distincte în spațiu astfel încât oricare trei sunt necoliniare. Aflați numărul dreptelor determinate de aceste n puncte ($n \in \mathbf{N}$, $n \geq 2$).

3. Se dau trei drepte concurente nesituate în același plan. Câte plane determină ele ?

4. Fiind date patru puncte, care nu sunt situate în același plan, câte plane care să conțină câte trei din aceste puncte există ?

5. Se dau 7 puncte în spațiu $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7$ astfel încât sunt îndeplinite simultan condițiile: a) A_1, A_2, A_3 sunt coliniare ; b) A_4, A_2, A_6 sunt coliniare ; c) A_5, A_2, A_7 sunt coliniare ; d) A_1, A_2, A_4, A_5 sunt necoplanare. Aflați numărul de plane determinate de punctele date.

6. Fie α un plan și $ABCD$ un paralelogram astfel încât $D \in \alpha$ și $A, B, C \notin \alpha$. Dacă $\{M\} = AB \cap \alpha$, $\{N\} = BC \cap \alpha$, arătați că punctele M, D, N sunt coliniare.

7. Fie d și d' două drepte necoplanare, A și B puncte distincte pe d și A', B' puncte distincte pe d'. Demonstrați că dreptele AA' și BB' nu sunt coplanare.

8. Trapezul $ABCD$ ($AB \| CD$), are vârfurile A și D în planul α și B, C nesituate în α. Dacă $\{M\} = BC \cap \alpha$, demonstrați că punctele A, D, M sunt coliniare.

9. Fie $[AB]$ un segment paralel cu dreapta d și $C \in d$. Dacă D este un punct astfel încât dreapta BD să fie distinctă de BA și necoplanară cu d, demonstrați că punctele A, B, C, D nu sunt coplanare.

10. Fie $ABCD$ un patrulater convex, care nu este nici trapez nici paralelogram, cu vârfurile situate într-un plan α și $P \notin \alpha$. Determinați intersecția planelor (PAC) și (PBD).

11. Se dă un plan α și A, B două puncte fixe situate de o parte și de alta a planului. Dacă M este un punct variabil în spațiu, $M \notin \alpha$ și $MA \cap \alpha = \{A'\}$, $MB \cap \alpha = \{B'\}$ arătați că dreapta $A'B'$ trece totdeauna printr-un punct fix al planului α.

12. Fie d, d' drepte paralele incluse într-un plan α și A, B două puncte fixe astfel încât dreapta determinată de ele intersectează planul α. Un plan oarecare β care conține dreapta AB intersectează d în M și d' în M'. Arătați că dreapta MM' trece printr-un punct fix.

13. Fie A, B, C, D patru puncte necoplanare. Arătați că: a) planele determinate de A și fiecare mediană a triunghiului BCD au o dreaptă comună ; b) planele determinate de A și fiecare înălțime a triunghiului BCD sunt concurente.

14. Cercul ζ are comun cu planul α punctul A. Fie $B, C \in \zeta$ și b, c tangentele duse în B, respectiv C, la cercul ζ. Dacă $\{P\} = b \cap \alpha$ și $\{Q\} = c \cap \alpha$, demonstrați că punctele P, A, Q sunt coliniare.

15. Se dă un plan și o dreaptă neinclusă în plan și neparalelă cu planul. Să se arate că dreapta de intersecție a planului dat cu un plan mobil dus prin dreapta dată trece printr-un punct fix.

16. Fie A, B, C trei puncte necoliniare și d o dreaptă oarecare în spațiu. Să se arate că planele determinate de d respectiv cu A, B și C intersectează planul (ABC) după trei drepte concu-

Scanned with OKEN Scanner

rente.

17. Se dau 9 puncte distincte în spațiu astfel încât oricare trei nu sunt coliniare și oricare patru sunt necoplanare. Câte plane care conțin câte trei din punctele date există ?

18. Se dau două drepte concurente d_1 și d_2 și o dreaptă oarecare în spațiu d_3. Pe d_3 se consideră un punct mobil M. Să se arate că dreapta de intersecție a planelor (M, d_1), (M, d_2) generează un plan.

19. Se dau două drepte necoplanare în spațiu și un punct care nu aparține acestor drepte. Să se arate că dacă există o dreaptă care conține punctul dat și intersectează dreptele date, atunci aceasta este unică.

20. Se dau trei drepte oarecare în spațiu. Să se construiască o dreaptă care intersectează cele trei drepte.

21. Fie d o dreaptă și $A \notin d$. O dreaptă d' intersectează planul (A, d) în punctul $B \neq A$. Construiți o dreaptă care trece prin A și intersectează dreptele d și d'.

22. Se dau două drepte și un plan care nu le conține. Să se ducă prin fiecare din cele două drepte câte un plan astfel ca dreapta de intersecție a acestor două plane să fie conținută în planul dat.

23. Fie A și B puncte distincte în spațiu și α, β, γ trei plane. Dacă $\{A, B\} \subset \alpha \cap \beta$ și $\gamma \cap \beta = \{A\}$, ce puteți afirma despre intersecția planelor α, β, γ ?

24. Să se arate că există patru plane, astfel ca intersecțiile acestor plane, luate două câte două, să fie drepte, intersecțiile acestor plane luate trei câte trei să fie formate din câte un punct, iar intersecția celor patru plane să fie mulțimea vidă. Care este numărul dreptelor și care este numărul punctelor date de intersecțiile considerate ?

25. Fie M o mulțime de drepte, astfel ca orice două drepte din mulțimea M să aibă intersecția nevidă, dar oricare trei din aceste drepte să aibă intersecția vidă. Să se arate că există un plan care conține toate dreptele mulțimii M.

26. Fie α, β, γ trei plane astfel încât $\alpha \cap \beta \cap \gamma$ este formată dintr-un singur punct. Să se arate că fiecare din intersecțiile $\alpha \cap \beta$, $\alpha \cap \gamma$, $\beta \cap \gamma$, este o dreaptă și că dreptele date de aceste intersecții sunt concurente, dar necoplanare.

27. Fie M o mulțime de drepte astfel ca orice două drepte din M să aibă intersecția nevidă și astfel ca să nu existe nici un plan care să conțină toate dreptele mulțimii M. Să se arate că astfel ca să nu existe nici un plan care să conțină toate dreptele mulțimii M. Să se arate că există un punct care aparține fiecărei drepte din mulțimile M.

28. Se dau două triunghiuri ABC și $A'B'C'$ situate în plane distincte α și β care se intersectează după o dreaptă d. Dacă $AB \cap A'B' = \{M\}$, $BC \cap B'C' = \{N\}$ și $CA \cap C'A' = \{P\}$, demonstrați că punctele M, N, P sunt coliniare.

29. Să se arate că planele determinate de câte o latură a unui patrulater strâmb și de mijlocul laturii opuse trec prin același punct.

30. În planul α fie punctul A fix. Pe dreapta $d \not\subset \alpha$ se ia punctul M și fie M' intersecția dreptei AM cu α. Determinați locul geometric al punctelor M'.

31. Să se demonstreze că trei drepte necoplanare care au două câte două un punct comun sunt concurente.

32. Fie d și g două drepte coplanare și $A \in d$, $B \in g$. Să se arate că orice punct M al segmentului $[AB]$ aparține planului dreptelor d și g.

*
* *

Scanned with OKEN Scanner

CAP. VII. • PARALELISM ÎN SPAȚIU •

1. Fie triunghiul ABC și punctele $D, E \notin (ABC)$. a) Dacă $DE \parallel (ABC)$, demonstrați că planele $(A_1B_1C_1)$ și $(A_2B_2C_2)$ sunt paralele, unde A_1, B_1, C_1 sunt respectiv mijloacele segmentelor $[DA]$, $[DB]$, $[DC]$, iar A_2, B_2, C_2 respectiv mijloacele segmentelor $[EA]$, $[EB]$, $[EC]$. b) Dacă $DE \parallel (ABC)$, arătați că punctele A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2 sunt coplanare.

2. Fie $ABCD$ un paralelogram, O centrul său, M un punct exterior planului $(ABCD)$ și N mijlocul segmentului $[AM]$. Demonstrați că CM este paralelă cu planul (BND).

3. Fie A, B, C, D patru plane necoplanare cu $AB = AC$, iar E și F două puncte aparținând respectiv segmentelor $[AB]$ și $[AC]$ cu proprietatea că $AF = BE$. Dacă M este mijlocul lui $[EF]$, iar N este mijlocul lui $[AD]$, demonstrați că $MN \parallel (BCD)$.

4. Trapezele $ABCD$ și $ABEF$ sunt situate în plane diferite și $AB \parallel EF \parallel CD$. Fie M mijlocul lui $[AB]$, N mijlocul lui $[CD]$ și L mijlocul lui $[EF]$. Ducem $NP \parallel AC$, $MQ \parallel AC$, $P \in AD$, $Q \in BC$ și $LR \parallel BF$, $MS \parallel BF$, $R \in BE$, $S \in AF$. a) Demonstrați că punctele P, Q, R, S sunt coplanare. b) Ce condiție satisfac CD și EF pentru ca $PQRS$ să fie paralelogram?

5. Fie A, B, C, D patru puncte necoplanare, $E \in (BC)$ și $EF \parallel AB$, $F \in (AC)$, $EG \parallel AC$, $G \in (AB)$. Dacă $AE \cap FG = \{M\}$ și N este mijlocul segmentului (AD), demonstrați că $MN \parallel (BCD)$.

6. Fie $ABCD$ un trapez $(AB \parallel CD)$, $M \notin (ABC)$ și $[EF]$ linie mijlocie a trapezului, $E \in (AD)$, $F \in (BC)$. Arătați că (MAB), (MCD), (MEF) au o dreaptă comună.

7. Fie A, B, C, D patru puncte necoplanare și L, M, N centrele de greutate ale triunghiurilor BCD, CAD, ABD. Demonstrați că planele (LMN) și (ABC) sunt paralele.

8. Se consideră semidreptele $(OX$, $(OY$, $(OZ$ nesituate în același plan. Fie $A \in (OX$, $B \in (OY$, $C \in (OZ$ și $A' \in (OA)$. Se construiește planul $(A'B'C') \parallel (ABC)$, $B' \in (OY$, $C' \in (OZ$. Demonstrați că punctele O, G, G' sunt coliniare, unde G și G' sunt respectiv centrele de greutate ale triunghiurilor ABC și $A'B'C'$.

9. În planul α fie un cerc $C(O, r)$; fie $d \parallel \alpha$ și $P \notin \alpha$ un punct oarecare. Construiți un plan care conține P, este paralel cu d și conține o tangentă la cercul $C(O, r)$.

10. Se dau două drepte d_1 și d_2 necoplanare. Arătați că întotdeauna aceste două drepte sunt conținute în două plane paralele.

11. Fie A, B, C, D patru puncte necoplanare, M mijlocul lui $[BC]$ și N mijlocul lui $[CD]$. Dacă $P, Q \in (CA)$ cu $CP = PQ = QA$ arătați că planele (MNP) și (BQD) sunt paralele.

12. Paralelogramul $ABCD$, rombul $CDGH$ și trapezul $ABEF$ $(AB \parallel EF)$, sunt în plane diferite. Arătați că: a) E, F, G, H; C, D, E, F și A, B, G, H sunt puncte coplanare; b) perechile de drepte (DE, FC), (AH, GB) și (FH, GE) sunt concurente.

13. Se dau două segmente congruente $[AB]$ și $[CD]$ situate pe două drepte necoplanare, a respectiv b. Se consideră un punct variabil M pe $[AB]$ și un punct variabil N pe $[AM]$ cu

Scanned with OKEN Scanner

$AM = CN$. Arătați că MN este paralelă cu un plan fix.

14. Se dau: planul α și două drepte a, b necoplanare, niciuna conținută în α. Să se construiască un plan β care să îndeplinească următoarele condiții: a) $\beta \parallel \alpha$; b) $a \cap \beta \neq \emptyset$; c) $b \subset \beta$. (*Discuție*).

15. Se dau două plane α_1 și α_2 secante. Dacă $\zeta_1 \subset \alpha_1$ și $\zeta_2 \subset \alpha_2$ sunt două cercuri, construiți dreptele t_1, t_2 tangente respectiv la ζ_1, ζ_2 astfel încât $t_1 \parallel t_2$.

16. Fie d și d' două drepte necoplanare și A, B, C trei puncte distincte pe d, iar A', B', C' puncte distincte pe d' astfel încât: $\frac{AB}{AC} = \frac{A'B'}{A'C'}$. Demonstrați că dreptele AA', BB', CC' sunt paralele cu un același plan. (Reciproca teoremei lui *Thales*).

17. Triunghiul ABC are doar vârful C comun cu un plan α. Dacă AB este paralelă cu α, găsiți natura patrulaterului $ABCE$, unde $\{E\} = BD \cap \alpha$ și D este mijlocul laturii $[AC]$.

18. Se consideră patru puncte necoplanare A, B, C, D. Se unește mijlocul M al segmentului $[BC]$ cu mijlocul N al segmentului $[AD]$. a) Construiți cu M ca vârf, unghiul dreptei MN cu AB și N ca vârf, unghiul dreptei MN cu CD. Arătați că laturile diferite de MN ale acestor unghiuri se intersectează pe AC. b) Care este condiția necesară și suficientă ca aceste unghiuri să fie congruente?

19. Considerăm în planul α paralelogramul $ABCD$ și fie $M \notin \alpha$. Demonstrați că dacă planul β intersectează MA, MB, MC, MD respectiv în A_1, B_1, C_1, D_1 și $\beta \parallel \alpha$, atunci $A_1B_1C_1D_1$ este un paralelogram.

20. Se dă un plan α și patru puncte oarecare A, B, C, D nesituate în acest plan. Notăm cu M mijlocul segmentului $[AB]$ și cu N mijlocul segmentului $[CD]$. Prin A, B, C, D se duc paralele la MN care intersectează planul α respectiv în A_1, B_1, C_1, D_1. Demonstrați că A_1, B_1, C_1, D_1 sunt vârfurile unui paralelogram.

21. Fie $ABCD$, $A'B'C'D'$ două paralelograme oarecare în spațiu și M, N, P, Q respectiv mijloacele lui $[AA']$, $[BB']$, $[CC']$, $[DD']$. Arătați că $MNPQ$ este paralelogram.

22. Prin vârfurile paralelogramului $ABCD$ se duc patru drepte paralele între ele pe care se iau de aceeași parte a planului (ABC), punctele A', B', C' astfel încât: $AA' = 3a$, $BB' = 4a$, $CC' = a$. Să se determine punctul în care planul $(A'B'C')$ intersectează paralela dusă prin D.

23. Fie planele α și β și dreptele a, b care verifică condițiile: (i) $a \subset \alpha$, $b \subset \beta$; (ii) $a \parallel \beta$, $b \parallel \alpha$; (iii) a și b sunt necoplanare. a) Să se arate că $\alpha \parallel \beta$ folosind metoda reducerii la absurd. b) Arătați că $\alpha \parallel \beta$ folosind o demonstrație directă (*fără metoda reducerii la absurd*).

24. Se consideră o dreaptă d și un punct oarecare $A \notin d$. Arătați că mulțimea tuturor planelor care conțin punctul A și sunt paralele cu d, a o dreaptă comună.

25. Care este condiția pe care trebuie să o îndeplinească trei drepte pentru a putea construi trei plane paralele care să le conțină respectiv?

26. Fie A, B, C, D patru puncte necoplanare, $[AE]$ mediană în triunghiul ABC, $(E \in BC)$, $P \in (AE)$. Notăm cu M și N mijloacele segmentelor $[BP]$ respectiv $[CP]$, cu M_1 intersecția dreptei EM cu AB și cu N_1 intersecția dreptei EN cu AC. Demonstrați că $M_1N_1 \parallel (BCD)$.

27. Se dau trapezul $ABCD$ și rombul $DCFE$ situate în plane diferite. Baza mică a trapezului, $[AB]$, are lungimea de 4 cm, iar latura rombului are lungimea de 14 cm. Dacă $\{Q\} = AC \cap BD$ și $\{P\} = AF \cap BE$, să se calculeze PQ.

Scanned with OKEN Scanner

28. Se dau două drepte concurente OX și OY într-un plan α și două puncte A, B nesituate în α. Determinați un plan β care să conțină dreapta AB și care să intersecteze dreptele OX și OY respectiv în punctele M și N astfel încât dreptele AM și BN să fie paralele. Cum trebuie să fie AB pentru ca $AMNB$ să fie paralelogram ?

29. Fie α și β două plane secante și a dreapta lor de intersecție. Considerăm $M_1, M_2 \in \alpha$ și $N_1, N_2 \in \beta$ astfel încât $M_1N_1 \| M_2N_2$. Să se arate că $M_1M_2 \| N_1N_2 \| a$ sau $M_1M_2 \cap N_1N_2 \cap a \neq \emptyset$.

30. Se dau punctele necoplanare A, B, C, D. Fie punctele M, N, P, Q astfel încât M este mijlocul lui $[AC]$, N este mijlocul $[BM]$, P este mijlocul lui $[NC]$ și Q este mijlocul lui $[BP]$. Să se demonstreze că punctele A, N, Q, D sunt coplanare și că dreapta MP este paralelă cu planul (AND).

31. Fie (C) un cerc situat în planul α, d o dreaptă paralelă cu α, $O \notin d$ și $O \notin \alpha$. Construiți prin O un plan β paralel cu d și care conține o tangentă la cercul (C).

32. Trapezele isoscele congruente $ABCD$ și $ABEF$ ($AB \| CD$, $AB > CD$), sunt situate în plane distincte. Fie H proiecția lui D pe AB, K mijlocul diagonalei $[BD]$ și L mijlocul diagonalei $[BF]$. Demonstrați că planele (ACE) și (HKL) sunt paralele. Ce poziție are dreapta KL față de planul (CFE) ?

33. Trapezul $ABCD$ este dreptunghic în A, $[MN]$ este linie mijlocie, iar $M \in (AD)$ și $N \in (BC)$. Fie P un punct care nu aparține planului (ABC). Dreapta MN este coplanară cu dreapta de intersecție a planelor (PAB) și (PDC) ?

34. Fie α și β două plane secante după dreapta a, iar b o dreaptă neconținută în planele α și β, a necoplanară cu b. Să se construiască un plan γ care conține pe b și intersectează planele α și β după două drepte paralele.

35. Se dau două drepte d, d_1 paralele și A, $B \in d_1$ distincte. Fie C un punct pe dreapta d și D un punct astfel ca BD să fie distinctă de BA și nesituată în același plan cu d. a) Arătați că punctele A, B, C, D nu sunt situate în același plan. b) Un plan α variabil, paralel cu planul (ACD), intersectează segmentul $[AB]$ în I, dreapta d în J, dreapta BD în K. Notăm cu M, N, P, Q respectiv mijloacele segmentelor $[JK]$, $[KI]$, $[AD]$, $[CD]$. Găsiți natura patrulaterului $MNPQ$.

36. Fie A, B, C, D punctele necoplanare și $AB = AC$, $CD = BD$. Atunci dreapta determinată de centrele cercurilor înscrise în triunghiurile ACD și ABD e paralelă cu (ABC).

37. Fie A, B, C, D puncte necoplanare astfel ca: $AD \cdot BC = AC \cdot BD$; (AE este bisectoarea unghiului $\sphericalangle CAD$, $E \in (DC)$; $M \in (BC)$, $N \in (AC)$ cu $CM = CN = CE$, $P \in (AD)$, $Q \in (BD)$ cu $DP = DQ = DE$. Arătați că M, N, P, Q sunt coplanare.

38. Fie A, B, C, D patru puncte necoplanare astfel încât $AB = DC = BC = AD = DB = AC$. Dacă I, J, K sunt centrele cercurilor înscrise în triunghiurile ACD, ABD, BDC să se arate că planele (IJK) și (ABC) sunt paralele.

39. Pe planul hexagonului regulat $ABCDEF$ de latură $AB = 6$ cm, se ridică perpendiculara $AM = 12$ cm. Determinați punctul N pe AM astfel încât $(NBF) \| (MCE)$.

40. Fie A, B, C, D patru puncte necoplanare. Notăm cu E și F proiecțiile punctului A pe bisectoarele unghiurilor $\sphericalangle ABC$ și respectiv $\sphericalangle ABD$. Să se arate că $EF \| (BCD)$.

*

* *

Scanned with OKEN Scanner

CAP. VIII. • PERPENDICULARITATE ÎN SPAȚIU •

1. Fie triunghiul ABC dreptunghic în A cu $BC = 8$ cm, $MA = 4$ cm și $MA \perp (ABC)$, $d(M; BC) = 5$ cm. Calculați aria triunghiului ABC.

2. Un triunghi ABC isoscel de bază AC are $m(\sphericalangle B) = 120°$, $MA \perp (ABC)$, $MA = 3$ cm, $MD \perp BC$, $MD = 5$ cm. Calculați $A_{\Delta ABC}$.

3. Fie A, B, C, D patru puncte necoplanare astfel ca $m(\sphericalangle BAD) = m(\sphericalangle DAC) = m(\sphericalangle BAC) = 90°$, $AB = 1$ cm, $AD = 3$ cm, $AC = 4$ cm. Calculați $d[A, (BCD)]$.

4. Fie A, B, C, D patru puncte necoplanare astfel ca $AB = BC = CD = DA = 10$ cm, $m(\sphericalangle ABC) = 120°$, $BD = 6$ cm, M mijlocul lui (AC) și N mijlocul lui (BD). Calculați MN.

5. Fie A, B, C, D patru puncte necoplanare astfel încât cele șase segmente formate să fie congruente. Fie M mijlocul segmentului (AC) și N mijlocul segmentului (BD). Calculați MN dacă $AB = 4\sqrt{3}$.

6. Fie $ABCD$ un romb cu $m(\sphericalangle A) = 120°$, $\{O\} = AC \cap BD$. Dacă $MO \perp (ABC)$, aflați aria triunghiului MAB știind că $AB = x$ și $MO = 2x$.

7. Fie un triunghi oarecare ABC și $MA \perp (ABC)$. Dacă D este mijlocul lui $[MB]$, iar $E \in BC$ astfel încât $DE = \frac{1}{2} MB$ atunci $AE \perp BC$.

8. Fie triunghiul ABC cu $m(\sphericalangle A) > 90°$. Știind că triunghiul ABC este isoscel și $\sin C = \frac{2}{3}$, iar înălțimea din A are lungimea de 6 cm, aflați: a) perimetrul și aria triunghiului. b) distanțele de la D la vârfurile triunghiului, la laturile triunghiului și la înălțimea din A, unde $DB \perp (ABC)$, $DB = 6$ cm.

9. Fie rombul $ABCD$ cu $m(\sphericalangle A) = 60°$, $B = 6\sqrt{3}$. Notăm cu G centrul de greutate al triunghiului ABD. Fie $EG \perp (ABC)$ cu $GE = 4$ cm. Aflați distanțele de la E la laturile și diagonalele rombului.

10. Pe planul triunghiului dreptunghic ABC, în care $m(\sphericalangle A) = 90°$, $AC = a$ și $m(\sphericalangle C) = 60°$, se ridică în B o perpendiculară pe care se ia $BM = AC$. a) Arătați că $AC \perp (ABM)$. b) Calculați MA și MC.

11. În vârful A al triunghiului ABC se duce $AD \perp (ABC)$. Fie $[CE]$ înălțimea triunghiului ABC ($E \in [AB]$) și $EF \perp BD$ ($F \in BD$). Să se arate că $BD \perp (CEF)$.

12. În centrul de greutate G, al unui triunghi echilateral ABC, cu $AB = 1$ cm, se consideră: $GP \perp (ABC)$, $GP = 10$ cm. Calculați distanțele de la P la laturile triunghiului.

13. Pe planul paralelogramului $ABCD$ se ridică de aceeași parte a planului (ABC) perpendicularele $AA_1 = 6$ cm, $BB_1 = 5$ cm, $CC_1 = 10$ cm și $DD_1 = 1$ cm. Fie M mijlocul lui (A_1C_1) și N mijlocul lui (B_1D_1). Calculați lungimea segmentului MN.

14. În vârful A al trapezului $ABCD$ se ridică o perpendiculară pe planul său pe care se ia punctul $E \neq A$. Dacă $CF \perp AB$, $F \in AB$, $FG \perp BE$, $G \in BE$, să se demonstreze că $BE \perp (CGF)$.

15. Fie A, B, C, D patru puncte necoplanare și M, N, P, Q mijloacele segmentelor (AB), (BC), (CD) respectiv (AD). Demonstrați că: $(MP) \equiv (NQ) \Leftrightarrow AC \perp BD$.

16. Fie ABC un triunghi dreptunghic în A, iar M un punct exterior planului (ABC) astfel ca

Scanned with OKEN Scanner

$MB \perp AB$ și $MC \perp AC$. Fie N și P mijloacele segmentelor (AM), respectiv (BC). Stabiliți dacă $PN \perp (ABC)$.

17. Fie A, B, C și D patru puncte necoplanare cu $m(\sphericalangle ABD) = m(\sphericalangle ACD) = 90°$. Să se demonstreze că perpendiculara din A pe planul (BCD) intersectează acest plan într-un punct ce aparține cercului circumscris triunghiului BCD.

18. Pătratul $ABCD$ și rombul $(CDEF)$ sunt situate în plane perpendiculare. Demonstrați că: a) AF și BE sunt concurente. b) Dacă $\{M\} = AF \cap BE$ și $\{N\} = CE \cap DF$ atunci $MN \perp (CDEF)$.

19. Se consideră triunghiul ABC ($m(\sphericalangle A) = 90°$) și punctul D situat pe perpendiculara în C pe planul (ABC). Fie $x = m(\sphericalangle BDC)$, $y = m(\sphericalangle CDA)$ și $z = m(\sphericalangle ADB)$. Arătați că:

$$\cos x = \cos y \cdot \cos z.$$

20. Pe planul unui paralelogram $ABCD$ cu $AB = 2a$ și $AD = a$ se duc de aceeași parte a planului perpendicularele pe plan în punctele A, B, C, D. Luăm pe perpendicularele în P și D, punctele M și respectiv N, încât $BM = 2a$ și $DN = 3a$, iar pe perpendiculara în C se ia punctul P, încât $[MP] \equiv [NP]$. a) Să se calculeze lungimea segmentului $[NP]$; b) Planul (MNP) fiind intersectat de perpendiculara din A în punctul Q, să se calculeze lungimea segmentului $[AQ]$.

21. Trapezul $ABCD$ ($AB \parallel CD$) are aria egală cu $240\ cm^2$ și $AD = 10$ cm. În E, mijlocul lui (BC), se ridică perpendiculara EF pe planul trapezului, astfel ca $EF = 7$ cm. Să se afle distanța de la F la AD.

22. Dintr-un punct exterior unui plan se duc perpendiculara AO și oblicele AB, AC (O, A, $B \in \alpha$ dar nu sunt coliniare). Fie N și N' ortocentrele triunghiurilor ABC, respectiv OBC. Să se arate că $NN' \perp (ABC)$.

23. Fie dreptunghiul $ABCD$. Pe perpendiculara în D pe $(ABCD)$ se ia M cu $DM = 2a$. Știind că $m(\sphericalangle MBA) = 45°$ și $m(\sphericalangle MBC) = 60°$, să se calculeze: a) distanța de la M la dreapta AC; b) distanța de la D la planul (MAC).

24. În trapezul $ABCD$ cu $AB \parallel CD$, se știe că $AD = AB = BC = 5$ și $CD = 10$. În punctul C se duce perpendiculara pe planul $(ABCD)$ pe care se ia $CM = 5\sqrt{3}$. Să se afle distanța de la punctul M la laturile trapezului.

25. Se consideră triunghiul dreptunghic ABC cu catetele $AB = 6$, $AC = 4\sqrt{3}$, iar în A și C se ridică perpendicularele pe planul său $AM = 3$ și $CN = 1$. Să se calculeze distanța de la M la dreapta de intersecție a planelor (ABC) și (MNB).

26. Pătratele $ABCD$ și $BCEF$ sunt situate în plane perpendiculare. Dacă $AB = a$ și O este centrul pătratului $BCEF$ calculați distanța de la O la AC.

27. Pe planul rombului $ABCD$ cu lungimea laturii a și $m(\sphericalangle A) = 60°$, se ridică perpendiculara $DM = a$. Fie P și Q mijloacele segmentelor $[MD]$, respectiv $[MB]$. Să se afle: a) distanța de la M la BC; b) distanța de la P la AC.

28. Fie ABC un triunghi dreptunghic isoscel cu catetele $AB = AC = a$ și M un punct exterior planului (ABC) astfel încât triunghiul MBC să fie echilateral și planul său să facă cu planul (ABC) un unghi diedru cu măsura de $60°$. Să se calculeze: a) distanța de la punctul M la planul (ABC); b) ariile triunghiurilor MAB și MAC; c) distanța de la punctul A la planul (MBC).

29. Pătratul $ABCD$ și triunghiul dreptunghic isoscel AEB sunt în plane perpendiculare. Calculați distanța de la E la tangenta în C la cercul circumscris triunghiului ABC, știind că $AB = a$.

Scanned with OKEN Scanner

30. Fie triunghiul echilateral ABC cu latura de lungime $6\sqrt{3}$. Pe perpendiculara ridicată în centrul O al cercului circumscris triunghiului se ia segmentul $[OM]$, de lungime $2\sqrt{3}$. Să se calculeze distanța de la mijlocul lui $[BC]$ la MA.

31. ABC și ABD sunt două triunghiuri dreptunghice în A, unde $AB=12$, $BD=15$ și $m(\sphericalangle CAD)=60°$. Fie M un punct pe dreapta AC astfel încât $m(\sphericalangle ADM)=30°$. Calculați distanța de la B la dreapta MD.

32. În vârful B al dreptunghiului $ABCD$ se ridică perpendiculara BB_1 pe planul (ABC). Fie M mijlocul segmentului $[AB]$ și $BC=b$, $BB_1=a$. Să se calculeze distanța de la M la planul (DCB_1).

33. Pătratele $ABCD$ și $DCEF$, cu lungimea laturii a, au planele perpendiculare. Pe dreapta AD se ia punctul G astfel încât A să fie între D și G, iar $AG=x$. Se cere: a) valoarea lui x pentru $GC=a\sqrt{5}$; b) distanța de la punctul B la planul (EFG), G fiind punctul determinat la punctul a).

34. Se consideră pătratul $ABCD$, cu lungimea laturii a. În C și D se ridică perpendicularele $CC'=DD'=a$ pe planul pătratului. Dacă $\{O\}=AC\cap BD$, să se determine distanța de la O la planul $(ABC'D')$.

35. Trapezul dreptunghic $ABCD$, cu baza mare $AB=15$ cm, baza mică $CD=6$ cm, înălțimea $AD=12$ cm și dreptunghiul $ABEF$ cu $BE=9$ cm, au planele perpendiculare. Punctul M fiind intersecția dreptelor FD și EC se cere distanța de la M la planele (ABC) și (ABE).

36. Pe planul triunghiului echilateral ABC se duc, în vârfuri, perpendicularele AA', BB', CC' încât A', B' să fie de o parte a planului (ABC), iar C' de partea opusă. Știind că $AA'=3a$, $BB'=CC'=AB=a$, să se calculeze distanța de la A la planul $(A'B'C')$.

37. Pătratul $AEDC$ și dreptunghiul $AEFB$ sunt în plane diferite cu $DE\perp AB$. Știind că $CD=1$, $EF=\sqrt{3}$ să se calculeze: a) distanța de la E la FC; b) distanța de la B la planul (EFC).

38. În vârful A al paralelogramului $ABCD$, se ridică o perpendiculară pe planul său pe care se ia punctul E. Dacă $CF\perp AB$ și $FG\perp BE$, demonstrați că $BE\perp(CGF)$.

39. Fie dreptunghiul $ABCD$ și $PB\perp(ABC)$. Dacă $BE\perp PD$ și $BF\perp PA$, unde $E\in(PD)$ și $F\in(PA)$, să se arate că $PD\perp(BFE)$.

40. Fie A, B, C trei puncte necoliniare și P și Q două puncte distincte. Dacă $PA=PB=PC$ și $QA=QB=QC$, demonstrați că: $PQ\perp(ABC)$.

41. Se consideră rombul $ABCD$ cu latura de lungime 6, și $m(\sphericalangle BAD)=60°$. Pe planul rombului se duc perpendiculare $AE=3\sqrt{6}$ și $CF=\dfrac{3\sqrt{6}}{2}$ de aceeași parte a planului. Arătați că $(BED)\perp(BFD)$.

42. Pătratele $(ABCD)$ și $(ADEF)$ sunt situate în plane perpendiculare. Știind că $AD=a$, să se determine distanța dintre dreptele: a) CD și AF; b) AB și DF; c) OO_1 și AD, unde $\{O\}=AC\cap BD$ și $\{O_1\}=AE\cap DF$.

43. Pe planul rombului $ABCD$ cu latura de lungime 4 și diagonală $BD=4\sqrt{3}$, se ridică în A perpendiculara $AM=4$. Să se determine distanța dintre BD și MC.

44. Fie $ABCD$ un pătrat, $AB=10$, $AC\cap BD=\{O\}$. Dacă $VO\perp(ABCD)$, $VO=20$, determinați distanța dintre VD și BC.

45. Fie ABC un triunghi dreptunghic în A cu $AC=6$ și $AB=8$. În B se ridică perpendiculara BD pe planul triunghiului astfel ca $BD=10$. Dacă M și N sunt proiecțiile punctului A pe drep-

Scanned with OKEN Scanner

tele BC, respectiv CD, iar P și Q proiecțiile punctului B pe AD, respectiv DC, calculați distanța dintre planele (BPQ) și (AMN).

46. Unghiul $\sphericalangle XOY$ este situat în planul α și $m(\sphericalangle XOY) = u$. Punctul M este exterior planului α și $m(\sphericalangle MOX) = m(\sphericalangle MOY) = t$. Să se arate că: a) proiecția punctului M pe planul α aparține dreptei suport a bisectoarei unghiului $\sphericalangle XOY$; b) $t \geq \frac{u}{2}$.

47. În vârful A al unui triunghi în care $m(\sphericalangle A) = 90°$, $BC = 24$ și mediana corespunzătoare ipotenuzei este medie proporțională a catetelor, se ridică perpendiculara pe planul (ABC) pe care se ia segmentul $[AM]$, de lungime 6. Să se afle: a) unghiul format de planele (MBC) și (ABC); b) distanța de la punctul A la planul (MBC).

48. Se consideră rombul $ABCD$ având latura de lungime 6 și $m(\sphericalangle A) = 60°$, pe planul căruia se ridică (de aceeași parte) perpendicularele DD' și CC''. Știind că $AC' = 6\sqrt{5}$ și $BD'' = 6\sqrt{3}$ se cere: a) să se arate că dreptele AC'' și BD' sunt concurente; b) măsura unghiului dintre dreptele BC'' și CD'; c) tangenta unghiului format de planele (ABC) și $(BD'C'')$.

49. Pe planul unui paralelogram $ABCD$ cu $AB = a\sqrt{2}$, $BC = 3a\sqrt{2}$ și $m(\sphericalangle B) = 60°$ se ridică perpendiculara AM, de lungime $\frac{3a\sqrt{2}}{2}$ și fie P mijlocul segmentului $[MC]$. a) Să se arate că triunghiul BPD este isoscel și să se calculeze aria sa. b) Să se arate că distanțele de la punctul P la laturile $[AB]$ și $[CD]$ sunt egale și să se calculeze valoarea lor. c) Să se afle măsurile unghiurilor diedre formate de planele (PAD) și (PCD) cu planul $(ABCD)$.

50. Dacă OX, OY, OZ sunt trei drepte concurente în punctul O situate în planul α, M un punct exterior planului α și $\sphericalangle MOX \equiv \sphericalangle MOY \equiv \sphericalangle MOZ$, arătați că $MO \perp \alpha$.

51. Fie A, B, C, D patru puncte necoplanare așa încât $AB = AC = AD = BC = BD = CD$, iar α este un plan perpendicular pe AD în A. Notăm cu N_1 și N_2 ortocentrele triunghiurilor ABC și BCD. Arătați că: a) $N_1N_2 \perp \alpha$; b) $BC \parallel \alpha$.

52. Fie $ABCD$ un dreptunghi cu $AB = a$ și $m(\sphericalangle ABD) = 60°$, iar $[BE$ bisectoarea unghiului ABD $(E \in AD)$. Îndoim dreptunghiul după BD și BE astfel încât $(BDE) \perp (BCD)$ și $EA \parallel (BCD)$. Aflați $\sin((AB, (BCD))$ și $\operatorname{tg}((ABE), (BCD))$.

53. Fie pătratul $ABCD$ și de aceeași parte a planului (ABC), $AA' \perp (ABC)$, $BB' \perp (ABC)$, $CC'' \perp (ABC)$ și $DD' \perp (ABC)$ astfel încât $AA' = BB' = CC'' = DD' = AB = a$. a) Aflați unghiul dintre dreptele AB' și BD. b) Arătați că $(A'BC) \perp (C''BD)$. c) Aflați $\cos(A'B, (BC''D))$. d) Aflați $\operatorname{tg}((AB''D''), (ABC))$.

54. Se consideră rombul $ABCD$ cu $AB = 6$, având $m(\sphericalangle BAD) = 60°$. Pe planul rombului se duc perpendicularele $AE = 3\sqrt{6}$ și $CF = \frac{3\sqrt{6}}{2}$ de aceeași parte a planului. Calculați unghiul dintre planele (BED) și (BFD).

55. Pătratul $CDEF$ și trapezul $ABCD$ $(AB \parallel CD)$ sunt situate în plane perpendiculare. Dacă $BC = CD = DA = a$ și $AB = 2a$, să se determine: a) unghiul dreptelor DF și AB, EF și BD, FC și AD; b) cosinusul unghiurilor dreptelor AE și EC, AE și BF; c) unghiul planelor (ADE) și (BCF).

56. Pătratele $ABCD$ și $CDD'C''$ sunt în plane perpendiculare. Calculați măsura unghiului diedru format de planele $(D'CB)$ și $(D'C''B)$.

57. Fie ABC un triunghi echilateral. Pe laturile $[AB]$ și $[AC]$ se iau punctele E și respectiv F astfel încât $AE = 2BE$ și $CF = 2AF$. Dreptele BF și CE se intersectează în punctul D. Pe

Scanned with OKEN Scanner

perpendiculara în A pe planul (ABC) se ia un punct M astfel încât $AM = AB = 30$. a) Să se calculeze măsura unghiului dintre planele (EFM) și (FAM) precum și măsura unghiului dintre planul (CDM) și planul (DAM). b) Să se calculeze distanțele de la M la dreptele EF și CE'.

58. Pe planul triunghiului echilateral $A'B'C'$ cu lungimea laturii a se ridică perpendicularele $A'A = a$, $B'B = 2a$, $C'C = \frac{a}{2}$. Dacă $AB \cap (A'B'C') = \{M\}$, calculați: a) unghiul dintre $B'C'$ și planul $(CC'M)$; b) valoarea tangentei unghiului format de planele $(A'B'C)$ și (ABC).

59. Se consideră dreptunghiul $ABCD$. Pe planul dreptunghiului se ridică o perpendiculară $AV = c$. De asemenea se cunoaște $AB = a$ și $BC = b$. Se duce $AM \perp VB$ și $AN \perp VD$ unde $M \in VB$, iar $N \in VD$. Se cere: a) unghiul dintre CV și planul (AMN); b) unghiul dintre planele (ABC) și (AMN) în cazul când $a = c$ și $b = c\sqrt{2}$.

60. Se consideră pătratele $ABCD$ și $BCEF$ situate în plane care formează un unghi diedru de măsură $\varphi \in (0^\circ, 90^\circ)$. Dacă a este lungimea laturilor pătratelor, atunci distanța dintre dreptele AC și BE este: $\dfrac{a \sin \varphi}{\sqrt{\sin^2 \varphi + 2 \cos \varphi + 2}}$.

* * *

CAP. IX. • PRISMA •

1. Diagonala unui cub este egală cu $5\sqrt{3}$ cm. Calculați aria totală și volumul cubului.
2. Aria laterală a unui cub este $64\ cm^2$. Calculați: a) aria totală ; b) volumul; c) diagonala.
3. Volumul unui cub este $216\ cm^3$. Calculați: a) aria laterală ; b) aria totală ; c) diagonala ; d) aria secțiunii diagonale.
4. Aria secțiunii diagonale a unui cub este $49\sqrt{2}$. Calculați: a) aria cubului ; b) volumul său.
5. Diagonala unei fețe a unui cub este $9\sqrt{2}$ cm. Calculați: a) aria laterală ; b) volumul ; c) aria secțiunii diagonale.
6. Fie M mijlocul muchiei $[DC']$ a cubului $ABCDA'B'C'D'$. Dacă $AB = 2$ m , calculați: a) volumul ; b) aria totală ; c) lungimea lui $[B'M]$; d) distanța de la B' la $A'M$; e) unghiul dintre $A'M$ și (ABC).
7. Fie cubul $ABCDA'B'C'D'$ cu lungimea muchiei a. Calculați:
   a) distanța de la C' la planul $(D'DB)$; b) distanța dintre $D'B$ și $B'C$.
8. Fie M și N mijloacele muchiilor $[AB]$ și $[D'C']$ în cubul $ABCDA'B'C'D'$. Dacă aria triunghiului NAB este $2a^2\sqrt{2}$, calculați: a) aria totală ; b) volumul ; c) aria triunghiului ANC.
9. Fie cubul $ABCDA'B'C'D'$ de muchie 6 cm , $M \in (AA')$ cu $\frac{A'M}{AM} = \frac{1}{3}$, N mijlocul lui $[CC']$, $P \in (BB')$ cu $\frac{B'P}{BB'} = \frac{2}{3}$. Calculați: a) distanța de la B' la planul $(AD'C)$; b) o funcție trigonometrică a unghiului dintre (MNP) și (ABC).
10. Se consideră cubul $ABCDA'B'C'D'$ de muchie a și E mijlocul lui $[AD]$. Calculați: a) aria triunghiului $A'EB$; b) distanța de la A la $(A'EB)$.
11. Dimensiunile unui paralelipiped dreptunghic sunt $2\sqrt{3}$, $3\sqrt{2}$ și $\sqrt{6}$ cm. Calculați: a) aria totală ; b) volumul ; c) diagonala.
12. Fie $ABCDA'B'C'D'$ un paralelipiped dreptunghic cu $AB = 4$, $BC = 3$ și măsura unghiului dintre AC' și (ABC) egală cu 60°. Calculați aria totală și volumul.
13. Secțiunea diagonală a unui paralelipiped dreptunghic este un pătrat cu aria $100\ m^2$. Știind că dimensiunile bazei sunt direct proporționale cu numerele 0,4 și 0,3 , calculați aria totală și volumul paralelipipedului.
14. Paralelipipedul dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$ are $AB = 2\sqrt{3}$ cm, $BC = 4\sqrt{3}$ cm și distanța de la A la planul $(D'BC)$ egală cu 3 cm. Calculați volumul paralelipipedului.
15. Suma lungimilor muchiilor unui paralelipiped dreptunghic este 100 cm , iar lungimea diagonalei $10\sqrt{2}$ cm. Calculați aria totală.
16. Fie $ABCDA'B'C'D'$ un paralelipiped dreptunghic și M mijlocul lui $[A'D']$. Cunoscând $AB = 4a$, $BC = 2a$, aria triunghiului MBC egală cu $5a^2$, calculați: a) volumul paralelipipedului ; b) distanța de la B' la AM ; c) distanța de la A la (MBC).
17. Dimensiunile unui paralelipiped dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$, sunt $AB = a\sqrt{2}$, $BC = a$

Scanned with OKEN Scanner

și $AA' = a\sqrt{2}$. Un plan care trece prin diagonala BD intersectează AA' în E. Cunoscând $m\sphericalangle((EBD),(ABC)) = 30°$, se cere: a) volumul tetraedrului $EABD$; b) măsura unghiului dintre planele $(A'BD)$ și (EBD); c) volumul corpului rămas după înlăturarea tetraedrului $ABDE$.

18. Arătați că dacă lungimea diagonalei unui paralelipiped dreptunghic este $2a$, atunci aria sa totală este cel mult $8a^2$.

19. Paralelipipedul dreptunghic în care $d_1d_2 + d_1d_3 + d_2d_3 = 2d^2$, unde d_1, d_2, d_3 sunt diagonalele fețelor, iar d este diagonala paralelipipedului, este cub.

20. Dacă a, b, c sunt dimensiunile, iar d lungimea diagonalei unui paralelipiped dreptunghic, cu $a, b, c, d \in \mathbb{N}$, atunci $\frac{ab + ac + bc}{a + b + c + d} \in \mathbb{N}$.

21. Într-un paralelipiped dreptunghic cu baza pătrat, diagonala face cu fețele laterale unghiuri cu măsura 30°. Calculați lungimile muchiilor paralelipipedului, dacă diagonala are lungimea a.

22. Baza unui paralelipiped $ABCDA'B'C'D'$ este un romb cu lungimile diagonalelor 6 cm și respectiv 8 cm. Știind că fețele laterale au lungimile diagonalelor egale cu 13 cm, să se calculeze aria totală și volumul paralelipipedului.

23. Fie $ABCDA'B'C'D'$ un paralelipiped drept cu baza romb cu lungimea laturii a și $m(\sphericalangle ADC) = 60°$. Știind că aria laterală a paralelipipedului este $8a^2$, să se afle: a) volumul paralelipipedului; b) aria triunghiului $A'BD$; c) distanța de la A la planul $(A'BD)$.

24. Aria laterală a unei prisme patrulatere regulată dreaptă este $80\,m^2$, iar aria totală $112\,m^2$. Calculați volumul prismei.

25. Volumul unei prisme patrulatere regulată dreaptă este $150\,m^3$, iar aria laterală este $120\,m^2$. Calculați lungimea diagonalei prismei.

26. Într-o prismă patrulatere regulată dreaptă, aria bazei este $144\,cm^2$ și înălțimea 14 cm. Să se afle: a) diagonala prismei; b) aria secțiunii diagonale; c) aria totală și volumul prismei.

27. Se consideră o prismă patrulatere regulată. Știind că raza cercului circumscris bazei este 3 cm și înălțimea prismei 4 cm, să se afle aria și volumul prismei.

28. Latura unei prisme triunghiulare regulată dreaptă are lungimea 6 cm, iar diagonala unei fețe laterale 10 cm. Calculați aria laterală și volumul prismei.

29. Într-o prismă triunghiulară regulată dreaptă se cunosc raza cercului înscris bazei de $2\sqrt{3}$ cm și aria laterală $360\,cm^2$. Calculați volumul prismei.

30. O prismă triunghiulară regulată dreaptă are raza cercului circumscris bazei $2\sqrt{3}$ cm și volumul $135\,cm^3$. Aflați aria totală a prismei.

31. Fie $ABCA'B'C'$ o prismă triunghiulară regulată cu latura bazei de lungime a. Știind că măsura unghiului dintre BC' și AB' este 60°, calculați volumul prismei.

32. $ABCA'B'C'$ este o prismă triunghiulară regulată dreaptă. Știind că AB este de 6 cm și că $(A'BC)$ face cu (ABC) un unghi de măsură 30°, calculați aria totală a prismei.

33. Se dă o prismă triunghiulară regulată $ABCA'B'C'$ în care $AB = a$ și înălțimea prismei este dublul înălțimii triunghiului ABC'. Să se afle: a) aria laterală și volumul prismei; b) perimetrul și aria secțiunii determinate în prismă de planul $(AB'C)$; c) cosinusul unghiului plan al diedrului format de planele $(AB'C')$ și (ABC).

34. Fie $ABCDA'B'C'D'$ un paralelipiped dreptunghic. Arătați că dacă $AC' \perp (A'DB)$, atunci paralelipipedul este cub.

35. Fie $ABCDA'B'C'D'$ un paralelipiped dreptunghic cu $AB = 8$ cm, $BC = 6$ cm. Dacă M este

Scanned with OKEN Scanner

mijlocul lui $[AA']$, N este mijlocul lui $[AD]$, O este mijlocul lui $[C'N]$ și $D'M \perp MN$, calculați aria triunghiului MOC'.

36. Într-un paralelipiped dreptunghic diagonalele fețelor au lungimile 6, 8 și $6\sqrt{2}$. Calculați: a) lungimea diagonalei paralelipipedului; b) volumul paralelipipedului.

37. Demonstrați că oricum am alege 9 puncte în interiorul unui cub cu lungimea muchiei 2 cm, există două puncte așa încât distanța dintre ele să fie mai mică decât 1,74 cm.

38. Suma dimensiunilor unui paralelipiped dreptunghic este 9 cm. Calculați valoarea maximă pe care o poate lua volumul său.

39. Produsul dimensiunilor unui paralelipiped este 8 cm^3. Calculați valoarea minimă pe care o poate lua aria totală.

40. Fie $ABCDA'B'C'D'$ un paralelipiped dreptunghic în care $AB = 12$ m, $BC = 4$ m, $AC' = 14$ m. a) Să se calculeze volumul paralelipipedului. b) Notând cu O centrul bazei $ABCD$, să se calculeze OC'. c) Să se calculeze distanța de la O la AC'.

41. Fie $ABCDA'B'C'D'$ o prismă dreaptă cu baza $ABCD$ un romb cu lungimea laturii 8 cm și $m(\sphericalangle A) = 60°$. Aria laterală a prismei este 192cm^2. Calculați: a) volumul prismei; b) distanța de la A la planul $(A'DB)$.

42. Într-un cub $ABCDA'B'C'D'$, M este mijlocul lui $[AB]$ și N este punctul de intersecție dintre $B'C$ și BC'. a) Arătați că: $AC' \parallel (MB'C)$. b) Dacă $MN = 2\sqrt{3}$ cm, calculați aria triunghiului $B'MC$.

43. $ABCA'B'C'$ este o prismă dreaptă cu baza triunghiul dreptunghic ABC. Cunoscând că $AB = 30$ cm, $AC' = 40$ cm, $m(\sphericalangle A) = 90°$ și măsura unghiului dintre planele $(A'BC)$ și (ABC) este 60°, calculați aria laterală și volumul prismei.

44. Fie $ABCDA'B'C'D'$ o prismă dreaptă cu $ABCD$ trapez isoscel de baze AB și CD. Știind că $AB = a$, $DC = 2a$, perimetrul bazei este $6a$ și $AA' = a$, calculați volumul prismei.

45. Fie $ABCDA'B'C'D'$ un cub cu muchia de lungime a și M, N picioarele perpendicularelor din D și B' pe BD'. Arătați că: a) $BMD'N$ este paralelogram; b) $3MN = B'D$.

46. Fie $ABCDA'B'C'D'$ un paralelipiped dreptunghic. Un plan ce trece prin A taie muchiile $[BB']$, $[CC']$, $[DD']$, respectiv în M, P, N. Dacă $AB = 4\sqrt{5}$, $BC = 4\sqrt{2}$, $CC' = 3\sqrt{15}$, să se determine pozițiile lui M și N astfel ca $AMPN$ să fie romb, iar MB și ND să fie exprimate prin numere naturale.

47. O prismă dreaptă $ABCA'B'C'$ are bazele triunghiuri echilaterale cu latura de lungime a. Știind că $AB' \perp BC'$, arătați că $BC' \perp CA'$ și calculați volumul și aria totală.

*

* *

Scanned with OKEN Scanner

CAP. X. • PIRAMIDA •

1. Desenați o piramidă regulată care să aibă patru fețe laterale.

2. Desenați o piramidă regulată cu 3 muchii laterale.

3. O piramidă regulată are 12 muchii. Aflați numărul muchiilor bazei, numărul muchiilor laterale și numărul vârfurilor. Desenați piramida.

4. a) Care este numărul minim de culori de care avem nevoie pentru a colora fețele unei piramide patrulatere așa încât oricare două fețe care au o muchie comună, să fie colorate diferit ? b) Aceeași întrebare, pentru un tetraedru.

5. Există o piramidă cu 25 de muchii ? Justificați răspunsul.

6. Considerăm o piramidă patrulateră regulată. Notăm cu l, h, a și m latura bazei, înălțimea, apotema piramidei și muchia laterală exprimate în cm. Notăm cu A_b, A_l și A_t respectiv aria bazei, aria laterală și aria totală exprimate în cm^2, iar cu V volumul în cm^3. Completați următorul tabel:

l	h	a	m	A_b	A_l	A_t	V
8	3						
	6	10					
			13	100			
				36			48
4			4				
	5		10				
	16						768
18					540		

7. Considerăm o piramidă triunghiulară regulată și folosim aceleași notații ca în problema precedentă. Completați tabelul de mai jos:

l	h	a	m	A_b	A_l	A_t	V
5	6						
$3\sqrt{3}$			5				
		5	13				
			26	$100\sqrt{3}$			
12							$144\sqrt{2}$
				$9\sqrt{3}$	$9\sqrt{15}$		
					$75\sqrt{3}$	$100\sqrt{3}$	

8. O piramidă patrulateră regulată are latura bazei de 32 cm și înălțimea de 12 cm. Calculați:
a) volumul ; b) apotema ; c) aria totală.

9. Volumul unei piramide patrulatere regulate este $250\,cm^3$, iar latura bazei de lungime $5\sqrt{2}$ cm. Calculați înălțimea piramidei.

10. O piramidă patrulateră regulată are diagonala bazei egală cu $4\sqrt{2}$ cm, iar apotema pirama-

Scanned with OKEN Scanner

dei este de $2\sqrt{2}$ cm. Calculați: a) volumul ; b) aria totală ; c) măsura unghiului format de o față laterală cu planul bazei.

11. O piramidă patrulateră regulată are lungimea laturii bazei de 10 cm și aria totală de $100\left(1+\sqrt{2}\right)$ cm^2. Aflați: a) măsura unghiului a două muchii laterale alăturate ;
b) măsura unghiului a două muchii laterale opuse.

12. Fie $SABCD$ o piramidă regulată cu baza $ABCD$. Aflați volumul său, cunoscând că triunghiul SAC este echilateral de arie $50\sqrt{3}$ cm^2.

13. Ce se întâmplă cu volumul unei piramide patrulatere regulate dacă: a) latura bazei se dublează, iar înălțimea se micșorează de două ori ? b) latura bazei se micșorează de 3 ori, iar înălțimea se mărește de trei ori ? c) latura bazei se mărește de 5 ori, iar înălțimea se micșorează de 25 de ori ?

14. Un cub se descompune în 6 piramide patrulatere regulate având fiecare înălțimea de 9 cm. Aflați volumul și aria totală a fiecărei piramide.

15. Fie $SABCD$ o piramidă patrulateră regulată cu baza $ABCD$. Demonstrați că $SA \perp SC$ dacă și numai dacă $m(\sphericalangle ASB) = 60°$.

16. Aflați aria laterală a unui tetraedru regulat cunoscând că prin desfășurarea tetraedrului se obține un triunghi echilateral cu aria 16 cm^2.

17. Fie $SABC$ o piramidă triunghiulară regulată cu baza ABC. Aflați aria totală cunoscând că $m(\sphericalangle SBC) = 45°$, iar volumul piramidei este 36 cm^3.

18. Fie $SABCD$ o piramidă patrulateră regulată (de vârf S și bază $ABCD$). Demonstrați că planele SAC și SBD sunt perpendiculare.

19. Fie $SABCDEF$ o piramidă regulată având ca bază hexagonul $ABCDEF$. Aflați mărimea unghiului format de planele (SAD) și (SBE).

20. Fie $SABCD$ o piramidă patrulateră regulată cu baza $ABCD$. Notăm cu d_1 dreapta de intersecție a planelor (SAB) și (SCD), iar cu d_2 intersecția planelor (SBC) și (SAD). Demonstrați că $d_1 \perp d_2$.

21. O piramidă triunghiulară regulată are volumul $36\sqrt{3}$ cm^3, iar raza cercului circumscris triunghiului de la bază este 6 cm. Calculați: a) aria bazei ; b) înălțimea piramidei ; c) apotema piramidei ; d) aria totală ; e) perimetrul și aria secțiunii determinate de înălțimea piramidei și de o muchie laterală.

22. Fie $SABCD$ o piramidă regulată cu baza $ABCD$ de latură a. Calculați volumul piramidei cunoscând că aria laterală este egală cu dublul ariei bazei.

23. Măsura unghiului format de o față laterală a unei piramide patrulatere regulate cu planul bazei este 60°. Aflați raportul dintre aria totală a piramidei și aria bazei.

24. Fie $VABC$ un tetraedru regulat. Paralela dusă prin A la BC, paralela dusă prin B la AC și paralela dusă prin C la AB se intersectează două câte două formând un triunghi MNP. Demonstrați că VM, VN și VP sunt perpendiculare două câte două.

25. Fie $ABCD$ un tetraedru regulat și punctele M, N, P, Q situate pe $(AB), (BC), (CD), (DA)$ așa încât $[AM] \equiv [BN] \equiv [CP] \equiv [DQ]$. Notăm cu Q mijlocul segmentului $[NQ]$. Demonstrați că $NQ \perp (MOP)$.

26. Aflați volumul unui tetraedru regulat cu latura de lungime 6 cm.

27. Aflați volumul unui tetraedru regulat știind că raza cercului circumscris uneia dintre fețe este $4\sqrt{3}$ cm.

Scanned with OKEN Scanner

28. Înălțimea unui tetraedru regulat este $3\sqrt{6}$ cm. Aflați volumul și aria totală.

29. Aflați raportul dintre volumul unui cub $ABCDA'B'C'D'$ și volumul piramidei $ACB'D'$.

30. Fie $ABCDA'B'C'D'$ un cub și notăm cu O' intersecția diagonalelor pătratului $A'B'C'D'$. Comparați volumele piramidelor $O'ABCD$ și $A'BC'D$.

31. O piramidă triunghiulară regulată are lungimea apotemei 13 cm, iar apotema bazei de lungime 5 cm. Aflați volumul și aria totală.

32. Înălțimea unei piramide triunghiulare este 24 cm, iar sinusul unghiului α format de o față laterală cu planul bazei este $\frac{12}{13}$. Aflați volumul și aria totală.

33. Fie $ABCD$ un tetraedru regulat, iar M mijlocul muchiei $[AD]$. Cunoscând că aria triunghiului BCM este $9\sqrt{2}$ cm^2, aflați aria totală a tetraedrului.

34. Fie $SABC$ o piramidă regulată cu baza triunghiul ABC. Notăm cu M, N, P centrele de greutate ale fețelor laterale. Calculați raportul volumelor piramidelor $SABC$ și $SMNP$.

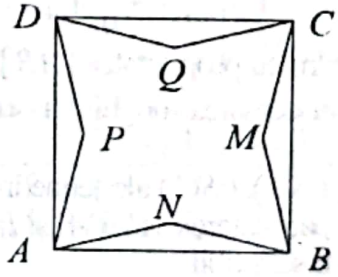
35. O piramidă patrulateră regulată are latura bazei de 6 cm, iar înălțimea 12 cm. Un cub $ABCDA'B'C'D'$ are fața $ABCD$ inclusă în planul bazei piramidei, iar punctele A', B', C', D' sunt situate pe muchiile laterale. Calculați lungimea laturii cubului.

36. O piramidă triunghiulară regulată are baza un triunghi echilateral circumscris unui cerc de rază 6 cm. Înălțimea piramidei are lungimea egală cu 12 cm. a) Aflați volumul piramidei. b) Calculați aria secțiunii determinată de un plan paralel cu baza, situat la 8 cm de vârf.

37. Fie $SABCD$ o piramidă patrulateră regulată, iar $SAEF$ o piramidă triunghiulară regulată. Cele două piramide au vârfurile S și A comune, iar bazele $ABCD$ și AEF sunt situate în același plan. Calculați raportul volumelor celor două piramide.

38. Fie $SABC$ o piramidă triunghiulară regulată, iar M, N, P trei puncte situate respectiv pe (AB), (BC) și (CA) cu $MN \parallel (SAC)$, $MP \parallel (SBC)$, $NP \parallel (SAB)$. a) Demonstrați că M, N și P sunt respectiv mijloacele laturilor (AB), (BC) și (CA). b) Aflați raportul volumelor piramidelor $SABC$ și $SMNP$.

39. Dintr-o foaie de tablă pătrată $ABCD$ cu latura 60 cm se înlătură triunghiurile AMB, BNC, CPD și DQA cu $[AM] \equiv [MB] \equiv [BN] \equiv [NC] \equiv [CP] \equiv [PD] \equiv [DQ] \equiv [QA]$ și $m(\sphericalangle AMB) = 150°$. Din porțiunea rămasă se confecționează o piramidă patrulateră. Aflați: a) aria laterală; b) înălțimea piramidei.



40. O piramidă regulată $VABCD$, cu vârful în V, are latura bazei $AB = 6$ cm. Un plan paralel cu baza determină o secțiune $A'B'C'D'$ cu aria 24 cm^2. Calculați raportul volumelor piramidelor $VA'B'C'D'$ și $VABCD$.

41. Fie $ABCDA'B'C'D'$ un paralelipiped dreptunghic având baza $ABCD$ pătrat de latură a, iar înălțimea $AA' = b$. Notăm cu O intersecția diagonalelor pătratului $ABCD$, iar cu M, N, P, Q centrele dreptunghiurilor $ABB'A'$, $BCC'B'$, $CDD'C'$ și $DAA'D'$. a) Demonstrați că $MNPQO$ este o piramidă patrulateră regulată. b) Aflați raportul dintre volumul piramidei $MNPQO$ și volumul paralelipipedului dat.

42. Demonstrați că dacă o piramidă are ca bază un poligon regulat, iar muchiile laterale sunt

Scanned with OKEN Scanner

congruente, atunci piramida este regulată.

43. a) Fie S, A, B, O patru puncte necoplanare cu $[SA] \equiv [SB]$ și $SO \perp (OAB)$. Demonstrați că $[OA] \equiv [OB]$ și $m(\sphericalangle AOB) > m(\sphericalangle ASB)$. b) Fie $SABC$ o piramidă triunghiulară regulată cu baza ABC. Demonstrați că $m(\sphericalangle ASB) < 120°$. c) Fie $SABCD$ o piramidă patrulateră regulată cu baza $ABCD$. Demonstrați că fețele laterale sunt triunghiuri ascuțitunghice.

44. Fie $ABCD$ un tetraedru regulat și punctele $M \in (BC)$, $N \in (CD)$. Demonstrați că:

a) $[MA] \equiv [MD]$ și $[NA] \equiv [NB]$; b) $MN < AM$ și $MN < AN$; c) $m(\sphericalangle MAN) < 60°$.

45. O piramidă regulată având ca bază un poligon cu un număr par de laturi are volumul egal cu $120\,cm^3$, iar perimetrul bazei 24 cm. Cum trebuie construită o secțiune care să treacă prin înălțimea piramidei așa încât aria acestei secțiuni să fie minimă ? Aflați aria acestei secțiuni.

46. Fie $ABCDA'B'C'D'$ un cub cu latura de lungime a. Notăm cu M, N, P mijloacele muchiilor $[AB]$, $[AD]$ și $[AA']$. Înlăturăm piramida $AMNP$ și analog, înlăturăm încă 7 piramide având vârfurile în câte un vârf al cubului și muchiile laterale congruente cu jumătate din latura cubului. Aflați: a) numărul de vârfuri, muchii și fețe al poliedrului obținut;
b) volumul și aria totală a acestui poliedru.

47. Două piramide patrulatere regulate $SABCD$ și $TABCD$ au baza $ABCD$ comună, iar punctele S și T sunt egal depărtate de planul $(ABCD)$ și sunt situate de o parte și de alta a acestui plan. Cunoscând că $[ST] \equiv [AC]$, arătați că: a) fețele laterale ale celor două piramide sunt triunghiuri echilaterale; b) unghiul planelor (SAB) și (SBC) este congruent cu unghiul planelor (SAB) și (TAB).

48. Fie $SABCDEF$ o piramidă regulată având ca bază hexagonul regulat $ABCDEF$ cu latura de lungime a. Muchia laterală $[SA]$ are lungimea $2a$. Notăm cu O piciorul înălțimii piramidei, iar cu A', B', C', D', E', F' proiecțiile lui O pe muchiile laterale ale piramidei.
a) Demonstrați că punctele A', B', C', D', E', F' sunt coplanare.
b) Aflați volumul piramidei $SA'B'C'D'E'$.

49. Un tetraedru $ABCD$ are $AB \perp AC$, $AC \perp AD$, $AD \perp AB$. Cunoscând că $BC = 5$ cm, $BD = \sqrt{34}$ cm, $CD = \sqrt{41}$ cm, aflați volumul tetraedrului.

50. Fie $OABC$ un tetraedru cu proprietatea: $OA \perp OB$; $OB \perp OC$, $OC \perp OA$. Arătați că:

$$V_{OABC} = \frac{2}{9} A_{AOB} \cdot A_{AOC} \cdot A_{BOC}.$$

51. Fie $ABCD$ un tetraedru cu proprietatea $[AB] \equiv [AD]$. Bisectoarea unghiului $\sphericalangle BAC$ taie pe $[BC]$ în E, iar bisectoarea unghiului $\sphericalangle DAC$ taie pe $[CD]$ în F. Demonstrați că $EF \parallel (ABD)$.

52. Pe muchiile (SA), (SB), (SC) ale tetraedrului $SABC$ se consideră punctele A', B' și respectiv C', așa încât patrulaterele $ABB'A'$ și $BCC'B'$ sunt inscriptibile. Demonstrați că patrulaterul $ACC'A'$ este inscriptibil.

53. Fie $VABCD$ o piramidă având ca bază trapezul $ABCD$ $(AB \parallel CD)$ și $[VA] \equiv [VB] \equiv [VC] \equiv [VD]$. a) Demonstrați că trapezul $ABCD$ este isoscel. b) Dacă notăm cu a intersecția planelor (VAB) și (VDC), iar cu b intersecția planelor (VAD) și (VBC), demonstrați că dreptele a și b sunt perpendiculare.

54. Piramida regulată $SABCD$ cu baza $ABCD$ are lungimea muchiei laterale 20 cm, iar $m(\sphericalangle SAB) = 75°$. O buburuză merge pe suprafața laterală a piramidei in punctul A până la mijlocul muchiei $[SC]$. Demonstrați că lungimea drumului parcurs de buburuză este mai mare decât 17 cm.

*
* *

Scanned with OKEN Scanner

CAP. XI. • TRUNCHIUL DE PIRAMIDA •

1. Un trunchi de piramidă are 8 vârfuri. a) Aflați numărul muchiilor și numărul fețelor ;
b) Desenați trunchiul de piramidă.

2. Un trunchi de piramidă are 9 muchii. a) Aflați numărul fețelor și numărul vârfurilor ;
b) Desenați trunchiul de piramidă.

3. Există un trunchi de piramidă cu 100 de muchii ?

4. a) Care este numărul minim de culori de care avem nevoie pentru a colora fețele unui trunchi de piramidă patrulateră , astfel încât oricare două fețe care au o muchie comună să fie colorate diferit ? b) Aceeași problemă pentru un trunchi de piramidă triunghiulară.

5. Considerăm un trunchi de piramidă patrulateră regulată. Notăm cu L și l lungimile laturilor celor două baze, cu h , m și a lungimile înălțimii, muchiei laterale și apotemei trunchiului; cu A_B , A_b și A_l ariile celor două baze și aria laterală, iar cu V volumul. L , l , h , m și a sunt exprimate în cm, A_B , A_b și A_l în cm^2, iar V în cm^3. Completați tabelul de mai jos:

L	l	h	m	a	A_B	A_b	A_l	V
10	4	4						
				10	1296	400		
					16	4		56
20	10						780	
52	10		$7\sqrt{34}$					

5. Pentru un trunchi de piramidă triunghiulară regulată folosim aceleași notații ca în problema precedentă. Completați următorul tabel:

L	l	h	m	a	A_B	A_b	A_l	V
			5		$27\sqrt{3}$	$27\sqrt{3}/4$		
			13	12		$4\sqrt{3}$		
4	2							$14\sqrt{3}$
					$16\sqrt{3}$	$9\sqrt{3}$		$37\sqrt{3}$
	4			5			90	

5. Un trunchi de piramidă regulată are latura bazei mari de 4 cm , latura bazei mici 1 cm , iar înălțimea 3 cm. Aflați volumul.

6. Un trunchi de piramidă patrulateră regulată are înălțimea 4 cm , volumul $28\ cm^3$, iar aria bazei mici este de 16 ori mai mică decât aria bazei mari. Calculați lungimile laturilor celor două baze.

7. Fie $ABCDA'B'C'D'$ un trunchi de piramidă regulată. Perimetrul bazei mari este 24 cm , iar perimetrul bazei mici este 12 cm. Cunoscând că apotema trunchiului de piramidă este $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ cm , calculați: a) aria totală ; b) lungimea muchiei laterale ; c) măsura unghiului format de dreptele AA' și BB' ; d) măsura unghiului format de AA' cu planul ($ABCD$).

Scanned with OKEN Scanner

8. Un trunchi de piramidă triunghiulară regulată are latura bazei mici de $32\sqrt{3}$ cm, latura bazei mari de $40\sqrt{3}$ cm, iar înălțimea de 6 cm. Calculați: a) volumul ; b) aria laterală.

9. Un trunchi de piramidă are volumul de 28 cm^3, iar aria bazei mari este de 4 ori mai mare decât aria bazei mici. Aflați volumul piramidei din care provine trunchiul.

10. Aflați volumul unui trunchi de piramidă dacă latura bazei mici reprezintă $\frac{2}{3}$ din latura bazei mari, iar volumul piramidei din care provine trunchiul este 270 cm^3.

11. O piramidă are înălțimea 12 cm și volumul 48 cm^3. La ce distanță de vârful piramidei trebuie să ducem un plan paralel cu baza așa încât volumul trunchiului de piramidă format să fie 33, (7) cm^3?

12. Un trunchi de piramidă triunghiulară regulată are înălțimea de 3 cm, latura bazei mari de 6 cm și latura bazei mici de 3 cm. Un plan paralel cu cele două baze este situat la distanța de 1 cm de baza mare. Aflați volumele celor două trunchiuri de piramidă formate.

13. Aria totală a unei piramide patrulatere regulate este 144 cm^2, iar latura bazei este 8 cm. Aflați volumul trunchiului de piramidă obținut prin secționarea piramidei cu planul determinat de centrele de greutate ale fețelor laterale.

14. Fie $ABCDA'B'C'D'$ un cub cu volumul 216 cm^3. Notăm cu Q intersecția diagonalelor pătratului $A'B'C'D'$, iar cu M, N, P, T mijloacele segmentelor $[QA']$, $[QB']$, $[QC']$ și $[QD']$. a) Arătați că dreptele AM, BN, CP și DT sunt concurente. b) Notând cu S punctul de intersecție a dreptelor AM, BN, CP și DT, calculați volumul piramidei $SABCD$. c) Calculați volumul trunchiului de piramidă $ABCDMNPQ$.

15. Un trunchi de piramidă patrulateră regulată are latura bazei mari 16 cm, latura bazei mici 8 cm, iar aria totală a piramidei din care provine trunchiul este 576 cm^2. Calculați aria totală și volumul trunchiului de piramidă.

16. Fie $ABCDA'B'C'D'$ un trunchi de piramidă patrulateră regulată și M, N, P, Q intersecțiile diagonalelor trapezelor $ABB'A'$, $BCC'B'$, $CDD'C'$, $DAA'D'$. Arătați că $MNPQ$ este pătrat și calculați lungimea laturii sale în funcție de $AB = a$ și $A'B' = b$.

17. O foaie de tablă are forma unui hexagon regulat $ABCDEF$ cu $AB = 6$ dm. Se notează cu M, N și P mijloacele laturilor $[AB]$, $[CD]$ și $[EF]$. Îndoind tabla de-a lungul segmentelor $[MN]$, $[NP]$ și $[PM]$ formăm o cutie fără capac în formă de trunchi de piramidă regulată cu baza MNP. Aflați volumul cutiei.

18. Un trunchi de piramidă hexagonală regulată are fețele laterale trapeze cu diagonalele perpendiculare. Unind mijoacele muchiilor laterale se obține un hexagon cu aria de $24\sqrt{3}$ cm^2. Calculați aria laterală a tunchiului de piramidă.

19. Considerăm un cerc de centru O și rază R, inclus în planul α și un cerc de centru O' și rază r, inclus în planul β, așa încât $OO' \perp \alpha$ și $OO' \perp \beta$. Fie ABC un triunghi echilateral înscris în cercul de centru O și rază R, iar $A'B'C'$ un triunghi echilateral înscris în cercul de centru O' și rază r. Cunoaștem că $R = 2r = 12$ cm, $OO' = 5$ cm și că $ABB'A'$ este trapez. a) Arătați că AA', BB', CC', OO' sunt concurente. b) Dovediți că $BCC'B'$ și $ACC'A'$ sunt trapeze. c) Calculați volumul trunchiului de piramidă $ABCA'B'C'$.

20. Demonstrați că pentru orice trunchi de piramidă regulată există un punct egal depărtat de toate vârfurile sale.

*

* *

Scanned with OKEN Scanner

CAP. XII. • CORPURI ROTUNDE •

§ 1. • Cilindrul circular drept •

1. Într-un cilindru circular drept raza bazei $R = 7$ cm, ia generatoarea $G = 13$ cm. Să se calculeze aria laterală, aria totală și volumul cilindrului.

2. Secțiunea axială a unui cilindru circular drept este un dreptunghi cu perimetrul 24 cm și aria de 32 cm^2. Știind că aria bazei cilindrului este 4π cm^2, să se calculeze: a) înălțima cilindrului; b) aria laterală; c) volumul.

3. Desfășurarea suprafeței laterale a unui cilindru circular drept pe un plan este un pătrat cu diagonala de $16\sqrt{2}\,\pi$ cm^2. Să se calculeze: a) raza cilindrului; b) generatoarea; c) aria laterală; d) volumul.

4. Să se completeze căsuțele libere din tabelul următor unde R, G, A_l, A_t, V sunt respectiv raza, generatoarea, aria laterală, aria totală și volumul unui cilindru circular drept.

	R	G	A_l	A_t	V
1	6	9			
2	8		60π		
3		7			28π
4	$3\sqrt{2}$			$72\sqrt{2}\,\pi$	
5			124π	196π	
6	5				125π
7		4		10π	
8			60π		$60\sqrt{3}\,\pi$

5. Secțiunea axială a unui cilindru circular drept are diagonala de $10\sqrt{3}$ cm și această diagonală face cu planul bazei un unghi cu măsura de 30°. Să se calculeze: aria laterală, aria totală și volumul cilindrului.

6. Dimensiunile razei și generatoarei unui cilindru circular drept sunt în proporționalitate directă cu mulțimea $\{2, 5\}$. Știind că perimetrul secțiunii axiale a cilindrului este 27, să se calculeze: a) aria laterală; b) aria totală; c) volumul cilindrului.

7. Desfășurarea suprafeței laterale a unui cilindru circular drept pe un plan este un dreptunghi cu diagonala de $12\sqrt{\pi}$ cm. Știind că unghiul determinat de diagonale are măsura de 60° să se calculeze: a) aria laterală; b) aria secțiunii axiale a cilindrului; c) volumul.

8. Diagonala secțiunii axiale a unui cilindru circular drept este de 13 cm, iar raza sa de 6 cm. Să se calculeze: a) aria laterală; b) aria totală: c) volumul cilindrului.

9. Latura triunghiului echilateral înscris în cercul de bază al unui cilindru circular drept este $6\sqrt{3}$ cm, iar distanța dintre planele bazelor este de 10 cm. Să se calculeze: a) aria laterală; b) diagonala desfășurării suprafeței laterale a cilindrului pe un plan; c) volumul.

10. Într-un cilindru circular drept aria secțiunii axiale este egală cu aria bazei. Să se demonstreze că $20\,G > 31\,R$, unde G și R sunt respectiv generatoarea și raza cilindrului.

Scanned with OKEN Scanner

11. Într-un cilindru circular drept, distanța de la un punct al unui cerc de bază la centrul celuilalt cerc de bază este de 85 cm, iar raza cilindrului are lungimea 84 cm. Să se calculeze: a) generatoarea; b) diagonala secțiunii axiale; c) volumul.

12. Secțiunea axială a unui cilindru circular drept este dreptunghiul $ABB'A'$, unde AA' este generatoarea. Știind că $AB = 10$ cm și $m(\sphericalangle AOB) = 120°$, unde $\{O\} = AB' \cap BA'$ să se calculeze: a) aria laterală; b) volumul cilindrului; c) diagonalele desfășurării suprafeței laterale a cilindrului pe un plan.

13. Aria laterală a unui cilindrul circular drept este de $61,25\,\pi$ cm^2, iar generatoarea este $\frac{5}{2}$ din rază. Să se afle volumul cilindrului.

14. Aria laterală a unui cilindru circular drept este egală cu suma ariilor bazelor. Știind că volumul cilindrului este $125\,\pi$ cm^3 să se calculeze aria secțiunii axiale a cilindrului.

15. Dintr-o foaie dreptunghiulară de tablă cu $L = 58$ cm și $l = 28$ cm se confecționează o cutie având forma de cilindru circular drept cu raza capacului egală cu 7 cm și astfel încât să se piardă cât mai puțin material. Să se afle volumul cutiei.

16. Un tinichigiu dorește să confecționeze dintr-o foaie dreptunghiulară de tablă cu dimensiunile $L = 120$ cm și $l = 80$ cm un burlan în formă de cilindru circular drept. Să se arate cum trebuie confecționat burlanul astfel încât să nu se piardă material și volumul său să fie maxim.

17. Se consideră un cilindru circular drept, în care secțiunea axială $ABB'A'$, are $AB = 9$ cm și $AA' = 15$ cm (AA' este generatoare). O furnică se deplasează pe suprafața laterală a cilindrului din punctul A' până în B' pe drumul cel mai scurt. Să se afle lungimea acestui drum minim parcurs de furnică. Aceeași problemă, dar furnica trebuie să ajungă din A în A', drumul ei intersectând o singură dată generatoarea BB'.

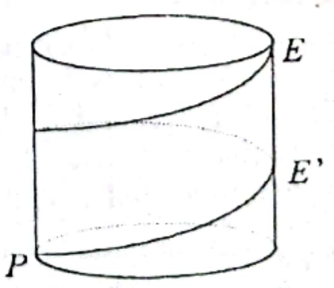
18. Se consideră un cilindru circular drept cu raza bazei de 10 cm și generatoarea de 30 cm. Pe cele două baze se iau coardele $[MN]$ și $[PQ]$ paralele, astfel încât MN este egală cu latura triunghiului echilateral înscris, iar PQ este egală cu latura pătratuluiînscris și patrulaterul convex $MNPQ$ să aibă perimetrul maxim. Să se calculeze aria patrulaterului $MNPQ$.

19. Să se afle masa unei țevi cilindrice, cu dimensiunile: diametrul interior 12 mm, diametrul exterior 14 mm și lungimea de 150 cm, știind că densitatea metalului din care este confecționată este de $7,8$ g/cm^3.

20. Un pătrat cu latura de 15 cm se rotește în jurul uneia dintre laturile sale. Să se afle, aria laterală, aria totală și volumul cilindrului care se obține.

21. Se consideră un cilindru circular drept cu raza de 3 cm și M este un punct pe suprafața sa laterală astfel încât distanța de la M la planul unei baze este de 4 cm, iar distanța lui M la centrul celeilalte baze este de 5 cm. Prin M se duce un plan paralel cu bazele cilindrului, să se afle raportul volumelor corpurilor determinate de acest plan în cilindrul dat.

22. Pentru a urca de la parterul, P, al unui magazin la etaj, E, se folosește o scară în spirală ca în figură. Dacă raza "*casei scărilor*" este de 3 m și înălțimea acesteia este de 6 m să se calculeze lungimea drumului PE parcurs de o persoană pe scări. (Se știe că $EE' = 4$ m)



23. Notăm cu V volumul unui cilindru circular drept, cu S aria sa totală, iar cu s aria laterală. Demonstrați că: $8\,\pi\,V^2 = s^2\,(S - s)$.

Scanned with OKEN Scanner

24. Într-un cilindru circular drept raza bazei este r, iar M și N sunt două puncte situate pe circumferințele bazelor. Știind că $MN = 2r$, iar măsura unghiului făcut de MN cu planul bazei, este $60°$, să se calculeze aria secțiunii axiale, aria laterală și volumul cilindului.

25. Fie $[B'B]$ o generatoare a unui cilindru circular drept și M un punct care aparține cercului de bază care conține punctul B. Știind că $BB' = 8$ cm, $MB' = 10$ cm și că MB este egală cu latura triunghiului echilateral înscris în cercul de bază, să se calculeze aria totală, diagonala desfășurării pe un plan a suprafeței laterale a cilindrului și volumul cilindrului.

*

§ 2. • Conul circular drept •

1. Un con circular drept are raza de 10 cm și înălțimea de 24 cm. Să se calculeze aria laterală și volumul conului.

2. Într-un con circular drept generatoarea este de 34 cm și înălțimea de 16 cm. Să se calculeze: a) aria bazei; b) aria laterală; c) volumul conului.

3. Aria laterală a unui con este 45π cm^2, iar raza sa de 5 cm. Să se calculeze volumul conului și aria secțiunii axiale.

4. Să se completeze căsuțele goale din tabelul următor, unde R, G, h, A_l, A_t, V reprezintă respectiv: raza, generatoarea, înălțimea, aria laterală, aria totală și volumul unui con circular drept.

	R	G	h	A_l	A_t	V
1	8	17				
2		13		65π		
3				128π	192π	
4			$2\sqrt{3}$			$150\pi\sqrt{3}$
5	12					4320π
6		3			10π	

5. Secțiunea axială a unui con circular drept este un triunghi echilateral cu aria de $36\sqrt{3}$ cm^2. Să se calculeze aria totală și volumul conului.

6. Lungimea bazei unui con circular drept este 18π cm, iar aria laterală a conului este 360π cm^2. Să se calculeze volumul conului.

7. Unghiul secțiunii axiale a unui con circular drept are măsura de $120°$, iar înălțimea conului este de 10 cm. Să se calculeze aria totală și volumul conului.

8. Generatoarea unui con circular drept are lungimea de $10\sqrt{2}$ cm și face cu planul bazei un unghi de măsură $45°$. Să se calculeze aria totală și volumul conului.

9. Un con circular drept are raza de 12 cm și generatoarea de 15 cm. La ce distanță de baza conului trebuie făcută o secțiune cu un plan paralel cu baza astfel ca aria secțiunii obținute să fie 16π cm^2 ?

10. Într-un con circular drept cu raza de 13 cm, aria bazei este jumătate din aria laterală. Să se calculeze volumul conului și aria secțiunii axiale a conului.

11. Într-un con circular drept înălțimea este de $4\sqrt{3}$ cm, iar generatoarea face cu planul bazei

Scanned with OKEN Scanner

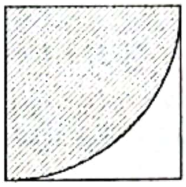
un unghi de măsură 60°. Se cere: a) aria laterală și volumul conului; b) distanța de la vârful conului la planul de secțiune paralel în baza care determină în con un cerc de lungime 4π cm.

12. Într-un con circular drept raza bazei este de 5 cm, iar înălțimea de $\sqrt{11}$ cm. Să se calculeze unghiul sectorului de cerc care se obține desfășurând suprafața laterală a conului pe un plan.

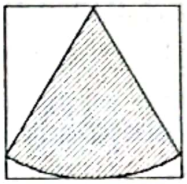
13. Desfășurând suprafața laterală a unui con circular drept pe un plan se obține un sector de cerc cu raza 12 cm și unghiul de măsură 135°. Să se calculeze volumul conului.

14. Distanța de la centrul bazei unui con circular drept la o generatoare este jumătate din lungimea generatoarei. Să se calculeze aria totală a conului dacă volumul acestuia este 9000π cm^3.

15. Pătratele din figura alăturată au latura de 10 cm. Sectoarele circulare trasate se înfășoară dând naștere la două conuri circulare drepte. Care dintre aceste conuri are volumul mai mare?



a)



b)

16. Capacitatea unei pâlnii având forma unui con echilater (secțiunea axială este triunghi echilateral) este de $36\pi\sqrt{3}$ l. Să se calculeze raza pâlniei.

17. Într-un con circular drept având generatoarea a, există trei generatoare care fac între ele, două câte două, unghiuri de 60°. Să se calculeze aria totală și volumul conului.

18. Un con circular drept are volumul $\frac{200\sqrt{11}}{3}\pi$ cm^3, iar lungimea înălțimii este $2\sqrt{11}$ cm. Să se determine măsura unghiului sectorului circular care se obține desfășurând pe un plan suprafața laterală a conului.

19. Să se arate că dacă aria laterală a conului care se obține prin secționare cu un plan paralel cu baza a unui con circular drept dat este egală cu aria bazei conului dat, atunci generatoarea conului mic este medie proporțională între raza și generatoarea conului dat.

20. Într-un sector circular cu un unghi drept se înscrie un cerc de rază r. Să se calculeze volumul și aria totală a conului circular drept care se obține prin înfășurarea sectorului circular.

21. Într-un con circular drept secțiunea axială este un triunghi echilateral VAB cu $AB = 24$ cm. O furnică se deplasează din punctul A, pe suprafața conului pe drumul cel mai scurt până în mijlocul generatoarei $[VB]$. Să se calculeze lungimea drumului parcurs de furnică.

22. Se consideră un con circular drept cu înălțimea de 12 cm și raza de $2\sqrt{11}$ cm. Prin punctul M care aparține înălțimii conului și este egal depărtat de vârful conului și de orice punct care aparține cercului de bază și duce un plan paralel cu baza. Să se calculeze volumul conului mic format prin secționarea conului mare.

23. Triunghiul isoscel ABC cu $AB = AC = 5$ cm și $BC = 8$ cm se rotește în jurul dreptei AB. Calculați aria și volumul corpului de rotație obținut.

24. Notăm cu V volumul unui con circular drept, cu S aria sa totală și cu s aria laterală. Demonstrați că: $9\pi V^2 = S(S - s)(2s - S)$.

25. Să se calculeze volumul și aria totală a unui con circular drept care are generatoarea a și în care există trei generatoare perpendiculare două câte două.

*

§ 3. • Trunchiul de con circular drept •

1. Într-un trunchi de con circular drept se cunosc: raza mică $r = 3$ cm, raza mare $R = 7$ cm și înălțimea $h = 4$ cm. Să se calculeze: a) aria laterală; b) aria totală; c) volumul trunchiului de con.

2. Se dă un trunchi de con circular drept cu generatoarea $G = 58$ cm, înălțimea $h = 42$ cm și raza mare $R = 52$ cm. Să se calculeze aria totală și volumul trunchiului de con.

3. Într-un trunchi de con circular drept se cunosc $R = 45$ cm, $r = 18$ cm, $G = 45$ cm. Să se calculeze aria laterală și volumul trunchiului de con.

4. Să se completeze tabelul următor unde R, r, h, G, A_l, A_t, V sunt respectiv: raza mare, raza mică, înălțimea, generatoarea, aria laterală, aria totală și volumul unui trunchi de con circular drept.

	R	r	h	G	A_l	A_t	V
1		5	35	37			
2	8	4			144π		
3	6				91π	128π	
4		1		10		67π	
5	4		6				56π
6	5	3					49π
7			4	5	55π		

5. Într-un trunchi de con circular drept raza mare este de trei ori mai mare decât raza mică, înălțimea are 16 cm, iar aria secțiunii axiale este de $384\ cm^2$. Să se calculeze aria totală și volumul trunchiului de con.

6. Într-un trunchi de con circular drept, generatoarea are lungimea de 12 cm și face cu planul bazei mari un unghi de măsură 60°. Știind că raza mică a trunchiului de con este de 4 cm să se calculeze: a) aria secțiunii axiale; b) aria laterală a trunchiului; c) volumul trunchiul.

7. Secțiunea axială a unui trunchi de con circular drept este un trapez isoscel cu bazele respectiv de 10 cm și 16 cm și cu diagonalele perpendiculare. Să se calculeze: a) aria laterală și volumul trunchiului de con; b) volumul conului din care provine trunchiul de con.

8. Un trunchi de con circular drept are $R = 9$ cm, $G = 10$ cm, $h = 8$ cm. Să se calculeze: a) volumul conului din care provine trunchiul; b) măsura unghiului sectorului circular care se obține prin desfășurarea pe plan a suprafeței laterale a conului din care provine trunchiul.

9. Aria desfășurării suprafeței laterale pe un plan a unui trunchi de con circular drept este aria unei semicoroane cu razele de 10 cm și 5 cm. Să se calculeze volumul trunchiului de con.

10. Volumul unui trunchi de con circular drept cu înălțimea de 12 cm, este de $388\pi\ cm^3$. Se secționează trunchiul cu un plan paralel cu baza dus prin mijlocul înălțimii. Știind că aria secțiunii este $30,25\pi\ cm^2$ să se calculeze: a) razele bazelor trunchiului; b) raportul volumelor celor două trunchiuri obținute prin secționare.

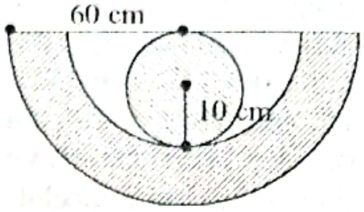
11. Suprafața laterală a unui trunchi de con circular drept se desfășoară pe un plan și se obține un sfert de coroană circulară. Generatoarea trunchiului este de 10 cm și aria laterală de $80\pi\ cm^2$, să se calculeze volumul trunchiului de con.

12. Într-un trunchi de con circular drept cu razele de 8 cm și 20 cm și generatoarea de 37 cm se

face o secțiune cu un plan paralel cu bazele obținându-se un cerc cu raza de 18 cm. Să se calculeze volumele celor două trunchiuri de con formate.

13. Un trunchi de con se obține prin "*rotirea*" unui trapez dreptunghic în jurul laturii perpendiculare pe baze. Știind că bazele trapezului au lungimile de 10 cm respectiv 7 cm, iar înălțimea trapezului are 4 cm, calculați: generatoarea, aria laterală, aria totală și volumul trunchiului de con obținut.

14. Dintr-o bucată de tablă în formă de semicerc cu raza de 60 cm se confecționează o găleată în formă de trunchi de con circular drept, cu raza bazei de 10 cm (vezi figura alăturată). Să se calculeze volumul găleții care se obține și aria materialului care rămâne ca deșeu.



15. Secțiunea axială a unui trunchi de con este un trapez isoscel circumscriptibil. Știind că înălțimea trunchiului este a și aria laterală $4\pi a^2$, calculați volumul trunchiului.

*

§ 4. • Sfera •

1. Se dă o sferă cu raza $R = 15$ cm. Să se calculeze aria și volumul sferei.

2. Aria unei sfere este 2500π cm^2. Să se calculeze volumul sferei.

3. Volumul unei sfere este de 972π cm^3. Să se calculeze aria sferei.

4. Raportul dintre volumul și aria unei sfere are valoarea 2. Să se calculeze aria și volumul sferei.

5. Se consideră o sferă cu raza $R = 18$ cm. Un plan situat la distanța de 6 cm față de centrul sferei secționează sfera. Să se calculeze aria secțiunii.

6. Aria secțiunii determinată într-o sferă de un plan situat la distanța de 5 cm față de centrul său este de 144π cm^2. Să se calculeze aria și volumul sferei.

7. Un plan intersectează o sferă cu raza $R = 125$ cm, după un cerc de lungime 200π cm. Să se calculeze distanța de la centrul sferei la acest plan.

8. Pe o sferă se consideră punctele A și B astfel încât $AB = 16$ cm. Știind că distanța de la centrul O al sferei la dreapta AB este de 6 cm să se calculeze aria și volumul sferei.

9. Două plane paralele intersectează o sferă de rază $R = 12$ cm după două cercuri cu razele $r_1 = 8$ cm și $r_2 = 10$ cm. Să se calculeze distanța dintre planele de secțiune.

10. Distanța de la centrul O al unei sfere la un plan α exterior sferei este $OA = 10$ cm. Fie B un punct în planul α astfel încât, $m(\sphericalangle AOB) = 60°$. Să se calculeze aria și volumul sferei știind că sfera este tangentă medianei din A a triunghiului AOB.

11. Pe o sferă se consideră punctele A, B, C astfel încât $AB = 68$ cm, $BC = 32$ cm, $AC = 60$ cm. Distanța de la centrul O al sferei la planul ABC este de 288 cm. Să se calculeze aria și volumul sferei.

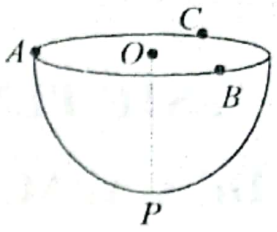
12. Pe o sferă cu raza de 75 cm, se consideră punctele A, B, C astfel încât $AB = AC = 30$ cm și $BC = 36$ cm. Să se calculeze distanța de la centrul O al sferei la planul (ABC).

13. Un bol din sticlă are forma unei calote sferice cu diametrul de 28 cm și înălțimea de 14 cm. Să se afle volumul și aria bolului.

14. O sferă are raza r și $[OA]$, $[OB]$, $[OC]$ sunt trei raze perpendiculare două câte două ale sferei. Să se calculeze ariile calotelor care au ca bază cercul circumscris triunghiului ABC.

Scanned with OKEN Scanner

15. Bolul din figura alăturată a fost obținut prin secționarea cu un plan a unui balon de sticlă. Cunoscând că $AB = AC = 5$ cm, $BC = 6$ cm și $OP = 3$ cm. Să se calculeze: a) aria bolului; b) aria și volumul balonului din care provine bolul.



*

§ 5. • Probleme diverse •

1. Dintr-un trunchi de copac având forma unui cilindru circular drept cu lungimea de 6 m și diametrul de 40 cm se "*cioplește*" o grindă având forma de prismă patrulateră regulată, astfel încât pierderea de material să fie minimă. Să se calculeze volumul prismei obținute.

2. Într-un cilindru echilater (secțiunea axială este un pătrat) se înscrie o sferă. Să se arate că raportul dintre aria sferei și aria totală a cilindrului este egal cu raportul dintre volumul sferei și volumul cilindrului. (Problema lui *Arhimede*)

3. Într-un con având raza razei R, se înscrie o sferă. Cunoscând că cercul de tangență al sferei cu suprafața laterală a conului are raza r, să se afle aria și volumul sferei.

4. Să se verifice că volumul unui trunchi de con circular drept cu înălțimea h și razele bazelor R și r este egal cu suma volumelor unui cilindru circular drept și a unui con circular drept având aceeași înălțime h și razele egale respectiv cu $\frac{R+r}{2}$ și $\frac{R-r}{2}$.

5. Să se arate că volumul unui trunchi de con circular drept cu razele R, r și înălțimea $R - r$ este un sfert din volumul cuprins între două sfere concentrice de raze R și r.

6. Demonstrați că toate conurile circulare drepte care au vârful în centrul unei sfere, iar bazele cercuri congruente pe sferă au același volum.

7. Un con echilater este circumscris unei sfere. Să se arate că raportul dintre aria sferei și aria totală a conului este egal cu raportul dintre volumul sferei și volumul conului.

8. Calculați în funcție de latura unui tetraedru regulat: a) raza sferei înscrisă în tetraedru; b) raza sferei circumscrisă tetraedrului; c) raza sferei tangentă celor 6 muchii ale tetraedrului.

9. Într-o sferă de rază 12 cm se înscrie un cilindru circular drept de înălțime $4\sqrt{11}$ cm. Să se calculeze aria totală și volumul cilindrului.

10. Fie ABC un trapez dreptunghic și ortodiagonal cu $AB \| CD$, $AB = 9$ cm și $CD = 4$ cm. Calculați aria și volumul corpului obținut prin rotirea suprafeței trapezului în jurul lui AB.

11. Într-un trunchi de con este înscrisă o sferă de rază r. Generatoarea trunchiului face cu planul bazei un unghi de măsură $60°$. Să se calculeze aria totală și volumul trunchiului de con.

12. Trapezul $ABCD$ are $AB \| CD$, $AB = 2a$, $AD = DC = CB = a$. Se notează cu V_1, V_2, V_3, V_4 volumele corpurilor obținute prin rotirea trapezului respectiv în jurul dreptelor: AB, CD, BC, AC. Să se arate că $2(V_3 - V_2) = V_1$ și $3V_4^2 = V_1^2$.

13. Determinați relația care există între generatoarea G și raza R a unui con circular drept a cărui arie totală și volum se exprimă prin același număr.

14. Într-un con circular drept cu raza bazei R se duce un plan paralel cu baza astfel încât aria laterală a conului mic care se obține să fie egală cu aria bazei conului dat, iar aria bazei conului mic să fie egală cu aria laterală a trunchiului de con format. Determinați raza bazei conului mic în funcție de R.

15. Într-o sferă de rază 1 se introduc trei sfere de raze egale. Să se determine raza acestor sfere știind că volumul ocupat de ele este maxim.

*

* *

Scanned with OKEN Scanner

B. TESTE PENTRU PROMOVAREA EXAMENULUI DE CAPACITATE ȘI ADMITEREA ÎN LICEU

TESTUL 1

I **1.** Să se efectueze: $\left\{111 : \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{50} + \frac{1}{500}\right) + [0,(5) + 0,(27)] \cdot \frac{198}{41}\right\} : 0,06$.

2. Suma a trei numere direct proporționale cu 2, 3 și 4 este 180. Să se afle numerele.

3. Calculați: $\frac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{5}-3} - \frac{\sqrt{3}+3}{\sqrt{2}+3}$.

II **1.** Se dă $P(X) = X^5 + 2X^4 - 3X^3 + X^2 - X + 1$. Să se calculeze câtul și restul împărțirii polinomului prin $X + 1$.

2. Se dă $F(X) = \frac{X^2 - 5X + 6}{X^2 - 7X + 10}$. a) Să se simplifice fracția. b) Pentru ce valori ale lui $x \in \mathbf{N}$ fracția ia valori naturale?

3. Determinați $a \in \mathbf{R}$ pentru care $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{a-2}{3-a}x + a$, este crescătoare.

III **1.** Într-un trapez isoscel $ABCD$, bazele sunt $AB = 180$ mm, $CD = 8$ cm, iar perimetrul său este 52 cm. Să se calculeze aria trapezului.

2. Un trunchi de con circular drept are razele bazelor de 7 cm și 11 cm, iar înălțimea de lungime 12 cm. Să se afle aria totală și volumul trunchiului de con.

3. O piramidă triunghiulară regulată are muchia laterală de lungime 10 cm și aria laterală de 144 cm^2. Să se afle volumul piramidei.

TESTUL 2

I **1.** Un număr este mai mic decât altul de 12,56 ori. Să se afle numerele, știind că suma lor este 1356.

2. Efectuați: a) $\left(2\sqrt{24} - \sqrt{54} + 6\sqrt{96} - \frac{1}{2}\sqrt{150}\right) \cdot \frac{2}{\sqrt{6}}$; b) $\frac{\left(1\frac{1}{3} - \frac{4}{3}\right) + \frac{4}{7}}{\left(\frac{-2}{3}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{6} - 2\right)}$.

II **1.** Să se efectueze: $\frac{1}{2X-4} \cdot \frac{3}{X+2} - \frac{5}{X^2-4}$.

2. Să se rezolve în $\mathbf{R}$ ecuația: $x + \frac{2x+3}{4} = -\frac{99}{20} - \frac{x-3}{5}$.

3. Să se rezolve în $\mathbf{R}$ sistemul de inecuații: $\begin{cases} x > 2x + 3 \\ 4x + 3 > 5x + 1 \end{cases}$.

Scanned with OKEN Scanner

4. Aflați restul împărțirii polinomului $P(X)=X^3+mX^2+nX+1$ cu $X-1$, știind că se divide cu $X+1$ și la împărțirea cu $X-2$ dă restul 5.

III. 1. Fie un triunghi dreptunghic isoscel cu aria egală cu $48\ cm^2$. Determinați lungimile laturilor triunghiului dat.

2. Pe planul triunghiului dreptunghic ABC ($m(\sphericalangle A)=90°$), cu catetele de lungimi 6 m și 8 m, se ridică în vârful A perpendiculara VA pe plan, $VA=10$ cm. Să se găsească: a) aria totală a tetraedrului $VABC$; b) volumul tetraedrului; c) cosinusul unghiului format de planul (VBC) cu planul (ABC).

3. Raza și înălțimea unui con circular drept sunt 6 cm și 8 cm. Să se afle: a) aria și volumul conului; b) aria și volumul sferei înscrisă în con; c) aria și volumul cilindrului echilateral înscris în con (*secțiunea axială este pătrat*).

TESTUL 3

I. 1. Să se efectueze: $(28,4\cdot 2,5-1,34):6,3:0,28+1,08:1,5$.

2. Într-un bloc sunt 88 de apartamente cu 2 camere și 3 camere. Câte apartamente sunt cu 2 camere și câte sunt cu 3 camere, dacă în total sunt 196 de camere?

3. Dintr-o cantitate de bumbac se obțin 24% fibre. Cât bumbac trebuie să se consume pentru a obține 120 kg de fibre?

II. 1. Să se afle un număr cuprins între 400 și 500, știind că suma cifrelor lui este 9 și că răsturnatul acestui număr reprezintă $\frac{36}{47}$ din numărul dat.

2. Arătați că: $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2-\left(\frac{a-b}{2}\right)^2\le\frac{a^2+b^2}{2}$, $(\forall)a,b\in\mathbf{R}$.

3. Se dă polinomul $P(X)$ de grad minim 2 care îndeplinește simultan condițiile:
a) $P(X)$ împărțit la $X-2$ dă restul -3; b) $[P(X)-3]\vdots(X-4)$.
Să se găsească restul împărțirii lui $P(X)$ la X^2-6X+8.

III. 1. Aria unui triunghi ABC este de $180\ cm^2$. Pe baza BC se ia un punct oarecare D și se notează cu M mijlocul segmentului $[AD]$. Se cere aria triunghiului BMC.

2. O prismă patrulateră regulată dreaptă are aria laterală $160\ cm^2$ și aria totală $192\ cm^2$. Să se afle lungimile muchiilor prismei.

3. Se dă un con circular drept cu înălțimea de 18 cm. La ce distanță de vârf trebuie dus un plan paralel cu baza, astfel ca aria secțiunii să fie jumătate din aria bazei?

TESTUL 4

I. 1. Calculați: a) $0^7+1^{13}+(-1)^{15}+(-1)^{12}$;
b) $|-3|+|0|-|-1|-\left|-\frac{1}{2}\right|$; c) $\sqrt{3}$ cu două zecimale exacte și să se facă proba.

2. Suma a trei numere este 2. Aflați numerele dacă sunt invers proporționale cu $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$.

3. Cinci muncitori pot termina o lucrare în 14 zile. În câte zile pot termina aceeași lucrare șapte muncitori?

Scanned with OKEN Scanner

II. 1. Soluția sistemului: $\begin{cases} \frac{x+1}{5}+\frac{y-1}{2}=2 \\ \frac{2x+1}{3}-\frac{3y+11}{4}=-2 \end{cases}$ reprezintă raza și înălțimea unui con circular drept. Să se afle: a) Aria și volumul conului . b) Aria și volumul sferei circumscrisă conului.

2. Aflați $m \in \mathbf{R}$, dacă $P(X)=X^3-mX^2+2X-1$, dă la împărțirea cu $X+1$ restul 3.

III. 1. În triunghiul dreptunghic ABC ($m(\sphericalangle A)=90°$), se dau $AB=33$ cm , $BC=65$ cm. Să se calculeze lungimile medianelor corespunzătoare laturilor $[AC]$ și $[AB]$.

2. O piramidă patrulateră regulată are muchia laterală de lungime 15 cm și înălțimea 12 cm. Aflați: a) latura bazei ; b) aria secțiunii diagonale ; c) volumul piramidei.

TESTUL 5

I. 1. Un biciclist trebuie să parcurgă un drum. El face în prima oră de mers mai puțin cu 1 km din jumătatea drumului. În ora a doua , el face $\frac{5}{7}$ din drumul rămas și încă 1 km și îi mai rămân de făcut 3 km. Câți kilometri a avut drumul ?

2. Efectuați: $2\frac{1}{2}+0,039:\left[\frac{1}{20}(2,31:0,077)\right]-2,526$.

3. Să se arate că numerele de forma $3^{n+2}-2^{n+2}+3^n-2^n$, $n \in \mathbf{N}^*$, se divid cu 10.

II. 1. Scrieți sub formă de fracție ireductibilă: $\left(\frac{X}{X-Y}+\frac{Y}{X+Y}\right):\left(\frac{X}{X-Y}-\frac{Y}{X+Y}\right)$.

2. Să se arate că $P(X)=2X^2+5X-3$ este divizibil cu $X+3$ și să se calculeze câtul.

3. Pentru ce valori reale ale lui x fracția $\frac{x-1}{1+x}$ este negativă ?

III. 1. Lungimile laturilor unui triunghi isoscel sunt 6 m , 5 m , 5 m. Să se calculeze raza cercului circumscris acestui triunghi.

2. Ariile bazelor unui trunchi de piramidă patrulateră regulată sunt 16 cm^2 și 9 cm^2. Muchia laterală face cu planul bazei un unghi de 60°. Aflați volumul trunchiului.

TESTUL 6

I. 1. Suma dintre un număr prim și un număr natural impar este 1995. Aflați numerele.

2. Pentru a strânge 810 l de apă într-un rezervor 6 robinete curg 45 de minute. Cât timp vor curge 10 robinete cu același debit ca și cele 6 robinete pentru a strânge 2100 l de apă ?

3. Să se calculeze: $2\frac{3}{4}:\left(1\frac{1}{2}-\frac{2}{5}\right)+0,75+\frac{5}{6}:\sqrt{10\frac{1}{36}}$.

II. 1. Rezolvați ecuația: $\frac{1}{x(x+1)}+\frac{1}{(x+1)(x+2)}+\frac{1}{(x+2)(x+3)}=\frac{3}{x(x+3)}$.

2. Demonstrați că: $\left|\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right| \geq 2, (\forall)a, b \in \mathbf{R}-\{0\}$.

3. Descompuneți în factori polinoamele: $P(X)=X^8+X^4+1$, $Q(X)=X^5+X+1$.

4. a) Să se reprezinte grafic $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x)=-3x+1$; b) Există puncte ale graficului care să aibă coordonatele egale ?

III. 1. Într-o piramidă triunghiulară regulată se dau latura bazei de 8 cm , muchia laterală de

Scanned with OKEN Scanner

12 cm. Să se afle: a) aria totală ; b) volumul ; c) unghiul format de o muchie laterală cu planul bazei ; d) mărimea unghiului diedru format de planul unei fețe laterale și planul bazei.

2. Un trapez dreptunghic $ABCD$ cu bazele $AB = 50$, $DC = 10$ și latura oblică $BC = 41$ se rotește în jurul lui AB. Aflați aria și volumul corpului care se obține.

TESTUL 7

I. 1. Aflați x din egalitatea: $\left[\left(x + 2^2\right) : 2^3 - 3^2 : 3\right] \cdot 2^4 = 2^5 - 2^4$.

2. Calculați: $(-1)^m \cdot (-1) + (-1)^n \cdot (-2) + (-1)^{19} \cdot (-3)^0$, $m, n \in \mathbf{N}$.

3. Efectuați: $\dfrac{12 + 25\sqrt{6}}{6} : \left(1 + \dfrac{\sqrt{6}}{4} - \dfrac{1}{\sqrt{6}} + \sqrt{24}\right)$.

II. 1. Să se afle suma coeficienților polinomului:

$$P(X) = \left(3X^2 - 2\right)^{1995} \cdot \left(8X^3 - 7\right)^{1996} \cdot (1 - 2X)^{1997} + \left(X^2 + X - 1\right)^{1998}$$

2. Să se scrie sub forma unei fracții ireductibile expresia:

$$E(X) = \frac{8X - 12}{4X^2 - 12X + 9} - \frac{5X}{2X^2 + 3X} - \frac{20X}{9 - 4X^2}.$$

3. Să se rezolve în $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ sistemul: $\begin{cases} y = 3x - 1 \\ 4x - 3y + 7 = 0 \end{cases}$.

III. 1. În triunghiul ABC cu $AB < BC$, $[BD$ este bisectoarea unghiului $\sphericalangle ABC$ și perpendiculara din A pe BD intersectează pe BC în E. Arătați că $[AB] \equiv [BE]$.

2. Baza unei piramide este un pătrat cu latura de 5 cm. Fețele laterale formează cu planul bazei unghiuri de 60°. Să se afle aria laterală și totală.

3. Desfășurarea unui con circular drept este un sector circular cu raza 12 cm și unghiul de măsură 135°. Calculați volumul conului.

TESTUL 8

I. 1. Determinați x pentru care: $\dfrac{x+1}{x} = \dfrac{0,(3) + 0,(27) + 1,(23)}{4,5 : 0,09 + 2 + \frac{2}{3}} \cdot 2607$.

2. Determinați numerele de forma $\overline{abca}$, divizibile cu 15, știind că: $a + b = 12$.

II. 1. O mașină consumă 8 l de benzină la suta de km și alta consumă 12 l. Într-o zi ambele mașini au parcurs în total 2400 de km și au consumat 208 l de benzină. Câți kilometri a străbătut fiecare mașină ?

2. Se dau polinoamele $P(X) = X^2 - 3X + 2$ și $Q(X) = X^2 + 3X + 2$. Să se arate că $P(Q(X))$ se divide cu $X^2 + 3X + 1$. Să se calculeze câtul.

3. Calculați valoarea expresiei:

$$E(a; b) = \left(a + \frac{ab}{a-b}\right) \cdot \left(a - \frac{ab}{a+b}\right) - \left(b - \frac{ab}{b+a}\right)\left(b + \frac{ab}{b-a}\right) - \frac{2a^2b^2}{a^2 - b^2},$$

pentru $a = \sqrt{3} + \sqrt{5}$ și $b = \sqrt{7} - 1$.

III. 1. Fie $ABCD$ un trapez cu $m(\sphericalangle A) = m(\sphericalangle D) = 90°$ și $AB = 51$, $CD = 9$, $AC = 41$. Să se

Scanned with OKEN Scanner

calculeze AD, BC, BD.

2. Muchiile ce pornesc din vârful unei piramide patrulatere regulate fac între ele un unghi de $60°$. Știind că latura bazei este a, calculați aria totală și volumul piramidei.
3. Un trunchi de con circular drept are razele bazelor și generatoarea proporționale cu $1, 4, 5$, iar înălțimea este 12 cm. Aflați aria totală și volumul trunchiului de con.

TESTUL 9

I 1. Efectuați: $\{25 + [-35 + 10 - (-15 + 20) + 100] - 90\} \cdot (6 - 3)$.

2. Să se arate că numărul $\overline{xyzxyz}$ (scris în baza 10) este divizibil cu 7, 11 și 13.

3. Să se găsească ultima cifră a numărului $A = 1^{1995} + 3^{1996}$.

II 1. Să se rezolve în $\mathbf{R}$ ecuația: $\frac{x-3}{x(x-1)} + \frac{5x}{2x-2} = \frac{15x-1}{6x}$.

2. Există $x \in \mathbf{R}$ astfel încât să avem: $\max(1 - x, 2x - 3) = 5$?

III 1. Unghiurile $\sphericalangle A$, $\sphericalangle B$, $\sphericalangle C$ ale unui triunghi ABC au măsurile invers proporționale, respectiv cu numerele $0,(3)$, $\frac{1}{7}$ și $0{,}125$. Fie $M \in (AB)$ și $N \in (AC)$ astfel încât $m(\sphericalangle ACM) = 40°$ și $m(\sphericalangle ABN) = 20°$. Să se determine măsurile unghiurilor triunghiului ABC și măsura unghiului $\sphericalangle ANM$.

2. Într-un trunchi de piramidă patrulateră regulată, laturile bazelor și înălțimea sunt 10 cm, 6 cm și respectiv 2 cm. Se cere: a) unghiul format de o față cu planul bazei; b) aria laterală și volumul trunchiului.

TESTUL 10

I 1. Comparați numerele: 9^{17} și 27^{11}; 3^{75} și 5^{50}.

2. Să se afle un număr, știind că dacă se împarte la 2, din rezultat se scade 10 și apoi se împarte la 11, se obține 4.

3. Determinați x, y, z, știind că sunt invers proporționale cu $2, 3, 8$ și $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{13}{1200}$.

II 1. Aflați $m \in \mathbf{R} - \{1\}$, pentru care ecuația $mx - \frac{m}{m-1} = \frac{1}{m-1} - x$ nu are soluții reale.

2. Găsiți funcția liniară care îndeplinește condiția: $f(3 - 2x) = 4x - 5$, $(\forall) x \in \mathbf{R}$.

3. Să se arate că $E(X, Y) = \left(\frac{3X - Y}{3X + y} - \frac{3X + Y}{3X - y}\right)\left(\frac{9X}{Y} - \frac{Y}{X}\right)$ nu depinde de X și Y.

4. Se dă $P(X) = X^4 + aX^3 - 7X^2 + bX - 18$. Să se determine valorile parametrilor a și b, știind că polinomul este divizibil cu $X - 1$ și cu $X - 2$.

III 1. Soluția ecuației $\frac{x+1}{2} - \frac{3x+1}{5} + 4 = x - 15$, reprezintă în cm, ipotenuza unui triunghi dreptunghic. a) Să se afle catetele triunghiului, știind că ipotenuza este respectiv cu 1 cm și cu 8 cm, mai mare decât catetele. b) Să se afle aria și volumul corpului obținut prin rotirea triunghiului în jurul ipotenuzei. c) Să se afle rapoartele ariilor și volumelor corpurilor obținute prin rotirea triunghiului în jurul catetelor.

2. Într-o prismă triunghiulară regulată dreaptă volumul este $V = 48a^3\sqrt{3}$ cm^3, iar latura bazei de lungime a. Să se calculeze aria totală.

Scanned with OKEN Scanner

TESTUL 11

I. 1. Calculați valoarea expresiei: $0,11:\frac{12}{121}-\frac{1}{(-2)^3}+\left(\frac{1}{2}-14\right)^2-0,(6)$.

2. Determinați numerele de forma $\overline{ab}$ mai mici sau egale cu 21, știind că $a+b$ este număr prim și apoi calculați cel mai mic multiplu comun al numerelor obținute.

3. Dacă $x=1,(45)$, $y=\frac{1}{2}+1,(3)$, calculați media aritmetică și media armonică a lor și apoi ordonați cele patru numere (x, y, media aritmetică și media armonică).

II. 1. Determinați valoarea parametrului real m, știind că ecuația $\frac{mx-1}{x+1}-\frac{mx+1}{2-x}=1$ admite soluția: $x=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^4$.

2. Descompuneți în factori ireductibili polinomul: $P(X)=(X+1)^3-3(X+1)+2$.

3. Se consideră funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=ax+\sqrt{2}$, unde $a\in\mathbf{R}-\{0\}$. Determinați funcția $g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ cu $g(x)=f(f(x))+x$, $(\forall)x\in\mathbf{R}$, știind că graficul funcției g intersectează axa Oy (a sistemului cartezian xOy) în punctul de ordonată $\sqrt{2}$.

III. 1. Într-un triunghi isoscel ABC cu $AB=AC=2$ cm, media armonică a măsurilor a două unghiuri necongruente este egală cu 48°. Calculați lungimea laturii [BC] și aria triunghiului BGC, unde G este centrul de greutate al triunghiului ABC.

2. Fie paralelipipedul dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$ cu lungimea diagonalei egală cu $2a$ ($a>0$, fixat). Știind că diagonala paralelipipedului formează cu fețele care au un vârf comun cu o extremitate a sa un unghi de măsură 30°, calculați măsura unghiului format de diagonala paralelipipedului cu planul bazei, aria totală și volumul paralelipipedului.

3. Dacă într-un con circular drept suma dintre lungimea generatoarei conului și raza bazei conului este egală cu $3+\sqrt{3}$ arătați că suma dintre aria laterală și cea totală a conului este strict mai mică decât: $2\pi\left(11+3\sqrt{13}\right)$.

TESTUL 12

I. 1. Calculați cel mai mare divizor comun al numerelor $a=2+3^2\cdot 2^2+5\cdot 2^3+7\cdot 2^4+9\cdot 2^5$ și $b=2^2+3\cdot 2^3+5\cdot 2^4+7\cdot 2^5+9\cdot 2^6$.

2. Determinați numerele de forma $\overline{1ab}$ care sunt divizibile cu 18.

3. Media geometrică a două numere naturale consecutive este egală cu $2\sqrt{3}$. Calculați media aritmetică a inverselor celor două numere.

II. 1. Dacă $x,y\in\mathbf{Q}^*$ cu $5x\neq 2y$ și $\frac{2x+3y}{5x-2y}=1,(6)$, calculați valoarea expresiilor:

$$\frac{x}{y},\ \frac{y}{x},\ \frac{x}{x+y}+\frac{y}{y+x}.$$

2. Determinați cel mai mare și cel mai mic element număr întreg al mulțimii:

Scanned with OKEN Scanner

$$A=\left\{x\in\mathbf{R}\,\middle|\,\frac{x}{x-\sqrt{2}}\geq 2\right\}.$$

3. Determinați $a, b\in\mathbf{R}$ știind că polinomul $H(X)=2P(X+1)-P(X)$, unde $P(X)=X^3+aX^2+bX+1$, este divizibil cu X^2-4.

III. 1. Se consideră un triunghi cu lungimile laturilor egale cu $3\sqrt{5}$ cm, $2\sqrt{3}$ cm și $\sqrt{33}$ cm. Calculați: a) perimetrul și aria triunghiului ; b) lungimile proiecțiilor laturilor cele mai mici pe latura cea mai mare a triunghiului ; c) lungimile înălțimilor triunghiului.

2. Piramida triunghiulară regulată $SABC$ cu vârful în S are lungimea laturii bazei egală cu a, $(a>0$, fixat$)$, iar unghiul format de planele (SAB) și (ABC) are măsura egală cu $30°$. Calculați aria laterală și volumul piramidei, precum și cosinusul unghiului format de o muchie laterală cu planul bazei piramidei.

3. Un con circular drept are raza bazei și lungimea generatoarei numere naturale. Știind că aria laterală a conului este egală cu 9π cm^2, calculați volumul conului.

TESTUL 13

I. 1. Dacă cel mai mare divizor comun a două numere este 54, iat câtul lor este egal cu 0,8 determinați cele două numere.

2. Pe unul din talerele unei balanțe a fost așezat un săculeț cu făină, iar pe celălalt taler, pentru a face echilibru, $\frac{1}{5}$ din greutatea săculețului plus încă $\frac{4}{5}$ kg. Cât cântărește săculețul cu făină ?

3. Arătați că $205_{(6)}+413_{(5)}=353_{(7)}$, știind că indicii arată bazele de numerație în care sunt scrise numerele.

II. 1. Determinați $A-B$ știind că:

$$A=\{x\in\mathbf{R}\,|\,3x-|2x+1|=0\};\qquad B=\{x\in\mathbf{R}\,|\,|x+1|\geq 2\}.$$

2. Se consideră funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, unde $f(x)=\begin{cases}x, & x\leq -1\\ 2x+1, & x>1\end{cases}$. Trasați graficul funcției $g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ definită prin $g(x)=(f(-1)-f(0))\cdot x+2\cdot f\left(\frac{1}{4}\right)\cdot f\left(\frac{2}{3}\right)$.

3. Rezolvați în mulțima numerelor reale sistemul de ecuații: $\begin{cases}5x-3y-\frac{1}{2}=x\\ 4x+5y-\frac{1}{3}=y\end{cases}$.

III. 1. Prin punctul O de intersecție a diagonalelor unui trapez $ABCD$ cu $AB\parallel CD$ și $AB>CD$ se duc paralele la AD și BC care intersectează pe AB în punctele M, respectiv N. Demonstrați că: $AM=BN$.

2. Se consideră cubul $ABCDA'B'C'D'$ unde $AC=a\sqrt{2}$. Determinați:
a) volumul cubului ; b) măsura unghiului format de planul $(A'D'C')$ cu planele $(ABCD)$ și $(A'B'C'D')$; c) distanța de la C' la dreapta $A'D$.

3. Un trunchi de con circular drept are lungimea generatoarei egală cu 8 cm, iar razele bazelor sunt direct proporționale cu numerele 3 (raza mică), respectiv 6 (raza mare). Calculați volumul trunchiului de con și tangenta unghiului format de generatoare cu planul bazei mari.

Scanned with OKEN Scanner

TESTUL 14

I 1. Calculați: $\left(\dfrac{2\frac{1}{2}+3\frac{1}{5}}{1\frac{1}{7}-\frac{3}{5}}+0,5\right):\dfrac{2,(3)-\frac{1}{2}}{2,(3)+\frac{1}{2}}:0,1$.

2. Să se determine două numere naturale știind că raportul lor este $\frac{6}{11}$, iar cel mai mic multiplu comun al lor este egal cu 1396.

3. Determinați numerele naturale n știind că: $E(n)=\dfrac{3n^2+2n+7}{n+2}\in\mathbf{N}$.

II 1. a) Arătați că: $\sqrt{18}+\sqrt{32}+\sqrt{50}-\sqrt{242}=\sqrt{2}$.

b) Rezolvați în $\mathbf{R}$ ecuația: $\sqrt{1-x}=\sqrt{|x|+1}$.

2. Rezolvați în mulțimea numerelor întregi: $\dfrac{3}{5x+4}<\dfrac{2}{x-3}\leq\dfrac{5}{7x-11}$.

3. Se consideră polinomul $P(X)=X^2+a$, unde a este un parametru real.

a) Determinați valorile lui a, știind că polinomul $Q(X)=P(X+1)$ împărțit la polinomul $X+2$ dă restul 5.

b) Pentru $a=-2$ descompuneți în factori ireductibili polinomul $P(X)$.

c) Pentru $a=2$ arătați că polinomul $R(X)=P(P(X))-P(X)-X$ are suma coeficienților un număr prim.

III 1. Din vârfurile B și C ale triunghiului ABC se duc paralele la bisectoarea unghiului BAC care întâlnește dreptele AB și AC în punctele E, respectiv F. Arătați că triunghiurile ABE și ACF sunt isoscele.

2. În vârful A al triunghiului dreptunghic ABC ($m(\sphericalangle BAC)=90°$) cu $AB=24$ cm și $BC=51$ cm se ridică o perpendiculară pe planul triunghiului pe care se consideră punctul V astfel încât $VA=6$ dm. Prin punctul D ($D\in(VA)$) situat la 4 dm de A se duce un plan paralel cu planul (ABC) care intersectează pe (VB) și (CV) în punctele E și F.

a) Arătați că perimetrul triunghiului DEF este egal cu $\frac{2}{3}$ din VA.

b) Arătați că: $\operatorname{tg}(\sphericalangle ACV)+\operatorname{tg}(\sphericalangle ABV)+\frac{1}{6}=4$.

3. Dacă V este volumul unui cilindru circular drept, S este aria totală a sa, iar A este aria laterală a sa, arătați că: $8\pi V^2=A^2(S-A)$.

TESTUL 15

I 1. Arătați că au loc egalitățile:

a) $\left(1^1+2^2+3^3\right):2^5=19^2:\left(4^4+5^3-20^1\right)=1$;

b) $\left(1^1+2^2+3^3\right):\left(4^4+5^3-20^1\right)=2^5:19^2$.

2. Determinați cifrele consecutive a și b, știind că numărul $\overline{124ab}$ este divizibil cu 18.

3. Dacă $n\in\mathbf{N}$, determinați cea mai mică valoare pe care o poate lua numărul:

Scanned with OKEN Scanner

$$A(n)=2,2(3)\cdot(-1)^{n+1}\cdot(-1)^{n^2+2}+\left(\frac{7}{2}:\frac{1}{4}\right)\cdot(-1)^n+(-1)^{n^2-n}.$$

II. 1. a) Rezolvați în $\mathbf{R}$ inecuația: $(x+2)\cdot|x|\le x+|x|$.

b) Raționalizați numitorii fracțiilor:

$$F_1=\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1},\ F_2=\frac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{3}},\ F_3=\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+1}.$$

2. a) Determinați toate funcțiile de gradul întâi $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ știind că:

$$f(2x)=2f(x),(\forall)x\in\mathbf{R}.$$

b) Din mulțimea de funcții găsite la punctul a) trasați graficul acelei funcții cu proprietatea: $f(1)+f(2)+\ldots+f(10)=55$.

3. Care sunt valorile lui m ($m\in\mathbf{R}$) pentru care fracția

$$F(X)=\frac{X^4+X^3-2mX^2+mX+1}{X^3-2X^2-5X+6},$$

se poate simplifica ?

III. 1. Se consideră un pătrat $ABCD$ cu lungimea laturii egală cu 1 cm și se prelungesc segmentele $[BC]$ și $[DA]$ cu segmentele $[CC_1]$ respectiv $[DD_1]$ de lungimi egale cu 1 cm. Arătați că A_1BC_1D este paralelogram și că triunghiul BDC_1 este dreptunghic.

2. Într-un plan (P) se consideră rombul $ABCD$ cu lungimea laturii egală cu 5 cm și cu lungimea diagonalei mici $[BD]$ egală cu 6 cm.

a) Calculați lungimea segmentului $[AC]$ și aria rombului $ABCD$.

b) În punctul M al segmentului $[AO]$ (unde $\{O\}=AC\cap BD$) se ridică o perpendiculară pe planul $(ABCD)$, pe care se consideră punctul N astfel încât $AN=AB$ și triunghiul BND să fie echilateral. Calculați lungimea segmentelor $[MN]$ și $[AM]$, precum și tangenta unghiului format de planele (BND) și (BCD).

3. Calculați aria laterală a unui con circular drept cu volumul $45\pi\ \text{cm}^3$, știind că lungimea înălțimii și raza bazei conului sunt exprimate prin numere naturale.

TESTUL 16

I. 1. Să se determine x din proporția: $x:4\frac{1}{6}=7\frac{1}{2}:2\frac{1}{4}$.

2. Un motociclist merge cu viteza constantă de 36 km / h, timp de $2\frac{1}{2}$ ore. La înapoiere, după ce merge cu aceeași viteză distanța de 66 km, se oprește și stă 20 de minute. Cu ce viteză trebuie să continue drumul pentru a ajunge în același timp ? Dacă plecarea a avut loc la 11 și 40 de minute, la ce oră va avea loc oprirea ?

3. Calculați suma dintre media aritmetică și cea armonică pentru numerele $a=0,41(141)$, $b=3,475$, $c=1,(5)'$ scriind rezultatul sub formă de fracție ordinară.

II. 1. Dacă m este un număr întreg, rezolvați în mulțimea numerelor întregi ecuația:

$$(2m+1)x+1=mx+m^2+m.$$

2. a) Descompuneți în factori ireductibili expresia: $E(x)=x^4-5x^2+4,\ x\in\mathbf{R}$.

b) Se consideră expresia:

$$F(x)=\left(\frac{x^4+x^2}{x^6+x^4+x^2+1}+\frac{1}{x^4+1}\right):\left(\frac{1}{x^2-1}-\frac{2x^2}{x^6-x^4+x^2-1}\right).$$

Scanned with OKEN Scanner

Determinați valorile lui x pentru care expresia nu are sens și arătați că: $F(x)=1+\frac{2}{x^2-1}$. În ipoteza că x^2 este întreg, determinați valorile reale ale lui x pentru care $F(x)$ este număr întreg.

3. Dacă $a, b, c \in \mathbf{R}$ demonstrați inegalitatea: $a^2+2b^2+3c^2 \geq 2c(a+2b)$.

III. 1. Se consideră triunghiul ABC cu proprietatea că $m(\sphericalangle ABC)=105°$ și $m(\sphericalangle ACB)=15°$. Arătați că dacă D este proiecția lui A pe BC, atunci: $AD^2=BD\cdot DC$.

2. Se consideră triunghiul dreptunghic ABC cu $m(\sphericalangle BAC)=90°$, $AB=a$, $AC=b$ ($a>0$, $b>0$, fixate) și planul (α) care conține BC și formează cu planul (ABC) un unghi de măsură 30°. a) Calculați distanța de la punctul A la planul (α).

b) Calculați lungimile segmentelor $[BM]$ și $[CM]$, unde M este proiecția lui A pe planul (α).

3. Aria laterală a unui con circular drept este $15\pi\,cm^2$, iar aria bazei conului este $\frac{3}{5}$ din aria laterală. Calculați volumul conului și măsura unghiului care se obține desfășurând suprafața laterală a conului.

TESTUL 17

I. 1. Se consideră numerele:

$$a=5\frac{1}{5}-\left[17\frac{2}{3}+\left(8\frac{1}{7}-3\frac{25}{28}\right)-14\frac{7}{5}-\left(7\frac{1}{16}-3\frac{7}{12}+\frac{1}{48}\right)\right];$$

$$b=4\frac{1}{6}-\left[17\frac{1}{24}+\left(8\frac{1}{18}-3\frac{3}{4}\right)-14\frac{5}{8}-\left(7\frac{5}{27}-3\frac{7}{18}-\frac{1}{54}\right)\right].$$

Calculați valoarea numerică a expresiei: $A=\sqrt{\frac{a+b}{a-b}-68(a-b)}$.

2. a) Arătați că: $n<\sqrt{n^2+6n+8}<n+3$, $(\forall)n\in\mathbf{N}$.

b) Demonstrați că numărul n^2+6n+8 nu este pătrat perfect pentru nici o valoare naturală a lui n.

3. Raza Lunii este de atâtea ori mai mică decât raza Pământului, de câte ori este 5 mai mic ca 18. Știind că raza Pământului este egală cu 6378 km, calculați raza Lunii.

II. 1. Dacă x și y sunt numere reale, arătați că:

$$(x-y)^3(x+y)=\left(x^2-xy^2\right)-\left(xy-y^2\right)^2.$$

2. Se consideră polinomul $P(X)$ care are proprietățile:

(i) $X\cdot P(X)$ împărțit la X^2-1 dă restul: -4;

(ii) $(P(X)+X)\vdots(X+2)$.

Știind că $\text{grad}\,P(X)\geq 3$, determinați restul împărțirii polinomului $P(X)$ la polinomul X^3+2X^2-X-2.

3. Determinați valorile reale ale lui a și b știind că graficul funcției $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=\begin{cases}x+a, & x\leq 2\\ -bx+2a, & x>2\end{cases}$, trece prin punctul $A(0,1)$ și prin punctul de intersecție al dreptelor de ecuație: $y-x-1=0$, $2y-x-5=0$. Trasați apoi graficul lui f.

Scanned with OKEN Scanner

III. 1. Drintr-un punct oarecare P interior triunghiului ABC se duc perpendicularele PA', PB', PC' pe laturile $[BC]$, $[CA]$ respectiv $[AB]$ astfel încât $A' \in [BC]$, $B' \in [AC]$ și $C' \in [AB]$. Arătați că: $BC^2 + AB^2 + AC^2 = 2(BC \cdot BA' + CA \cdot CB' + AB \cdot AC')$.

2. Fie $VABCD$ o piramidă patrulateră regulată cu vârful V și $AB = 2a$, unde $a \in \mathbf{R}_+$, fixat. Dacă planele (VAB) și (VBC) formează unghiuri de măsură egală cu 120°, calculați:

a) aria totală și volumul piramidei ;

b) distanța de la mijlocul înălțimii piramidei la o față laterală.

3. O sferă de rază R se secționează cu un plan situat la distanța x față de sferă. Calculați în funcție de R și x aria cercului de secțiune și ariile celor două zone sferice determinate de acest plan în sferă.

TESTUL 18

I. 1. Să se calculeze: $\sqrt{\dfrac{2+4+6+8+\ldots+20}{1+2+3+\ldots+21}}$.

2. Arătați că nu există nici un număr natural care împărțit la 16 să dea restul 4 și împărțit la 20 să dea restul 5.

3. Un ceas rămâne în urmă cu 105 secunde în 9 ore. Cu câte minute și secunde rămâne ceasul în urmă într-o săptămână ?

II. 1. Se consideră fracția $F(X) = \dfrac{X^2 + 6X - 16}{X^2 + aX + 1}$, unde a este un număr real nenul.

a) Determinați valorile lui a pentru care fracția este ireductibilă.

b) Pentru $a = 2$ determinați mulțimea: $A = \{\alpha \in \mathbf{R} \mid F(\alpha) \leq 0\}$.

2. Se consideră polinomul $P(X) = X^6 - X^5 + X^4 + X^2 + 1$.

a) Determinați câtul și restul împărțirii polinomului $P(X)$ la polinomul $X^3 - X - 1$.

b) Arătați că: $P(a) > 0$, $(\forall) a \in \mathbf{R}$.

3. Determinați punctele de pe graficul funcției $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \begin{cases} 2x+1, & x \leq 0 \\ 1-x, & x > 0 \end{cases}$, care au coordonatele egale și apoi trasați graficul lui f.

III. 1. Aria unui dreptunghi înscris în cercul $\mathscr{C}$ este egală cu 27 cm^2. Știind că lățimea dreptunghiului este de 3 ori mai mică decât lungimea sa, calculați: a) aria hexagonului înscris în cercul $\mathscr{C}$ și lungimea apotemei acesteia ; b) lungimea înălțimii triunghiului echilateral înscris în cercul $\mathscr{C}$ și raza cercului înscris în acest triunghi.

2. Se consideră trapezul $ABCD$ $(AB \parallel CD)$ cu $AB = 4$ cm, $CD = 6{,}25$ cm, $AD = 3$ cm și $BD = 5$ cm. În punctul D se ridică perpendiculara DM pe planul trapezului unde, $DM = 4$ cm. Calculați lungimea lui $[MA]$ și distanța de la M la dreapta BC.

3. Secțiunea axială a unui cilindru este un pătrat cu lungimea laturii egală cu 10 cm. Se consideră conul cu vârful în centrul unei baze a cilindrului și având înălțimea congruentă cu o treime din lungimea înălțimii cilindrului, iar raza egală cu cea a cilindrului. Calculați aria laterală și volumul acestui con.

TESTUL 19

I. 1. Determinați cifra a știind că: $0,(a) + 0,a(a) = \dfrac{2}{3}$.

Scanned with OKEN Scanner

2. Într-un rezervor se află $2400\,dm^3$ de apă sărată în proporție de 8 %. Dacă se adaugă $900\,dm^3$ de apă dulce, determinați noua concentrație a amestecului.

3. Determinați pătratul perfect de forma $\overline{abcde}$ știind că $\overline{ab}$, $a+b$, $c-b$ și b sunt pătrate perfecte.

II. 1. Rezolvați în $\mathbf{R}\times\mathbf{R}$ sistemul de ecuații: $\begin{cases} 2x-\frac{3}{2x-3y}=4(y+1) \\ \frac{4}{2x-3y}-x=3-2y \end{cases}$.

2. Efectuați: $\left(\frac{X+2}{2}-\frac{4X}{X+2}\right)\cdot\left(1+\frac{3}{X}+\frac{2}{X^2}\right)\cdot\frac{2X^2}{X^2-4}$.

3. Determinați valorile lui $a\in\mathbf{R}$, știind că polinomul $P(X)=a^2X^4-3aX^2+2$ este divizibil cu $X+1$.

III. 1. Fie ABC un triunghi cu $m(\sphericalangle BAC)=60°$, $AB=2$ cm și $AC=5$ cm. Dacă M este mijlocul laturii $[BC]$, demonstrați că suma distanțelor de la M la laturile $[BC]$ și $[AC]$ este egală cu $\frac{25\sqrt{3}}{12}$ cm.

2. Se consideră triunghiurile isoscele ABC și $A'BC$ ($AB=AC$, $A'B=A'C$, $BC=16$ cm) situate în plane diferite care formează un unghi de măsură egală cu 60°. Știind că $AB=17$ cm și $A'C\perp A'B$, calculați lungimea segmentului $[AA']$.

3. Se dă o sferă de rază $R=8$ cm și $[AA']$ diametrul ei. Sfera este tăiată cu un plan perpendicular pe AA' planul fiind situat la distanța de 5 cm față de A, planul intersectând sfera după un cerc $\mathscr{C}$. Dacă V_1 și V_2 sunt volumele conurilor având ca bază cercul $\mathscr{C}$ și vârfurile A și A', iar V este volumul sferei, calculați: $\frac{V_1+V_2}{V}$.

TESTUL 20

I. 1. Calculați media aritmetică a numerelor: $a=\left(3^2\cdot9^3\cdot81^2\right):243^3$, $b=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{16}$, $c=(-1)^{1+2}\cdot\frac{1}{3}-(-1)^{2+3}\cdot\frac{1}{9}+2\cdot(-1)^{3+5}\cdot\frac{1}{27}$.

2. Care este cel mai mic număr natural cu care trebuie să mărim ambii termeni ai fracției $\frac{5}{8}$ pentru ca fracția obținută să difere de unitate cu mai puțin de o miime?

3. Arătați că dacă a și b sunt numere întregi impare, atunci numărul $N=a^4-b^4+2\left(a^2-b^2\right)$ este divizibil cu 16.

II. 1. a) Calculați: $a=\left(3-2\sqrt{3}\right)^2$, $b=\left(3\sqrt{2}-2\sqrt{3}\right)^2$.

b) Arătați că: $\sqrt{21-12\sqrt{3}}+\sqrt{30-12\sqrt{6}}<\frac{3}{2}$.

2. Determinați numerele reale x și y știind că: $|x+y-1|+2\left(4x^2-4xy+y^2\right)=0$.

3. Se consideră funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, definită prin $f(x)=ax+3$, unde a este un număr real strict pozitiv.

Scanned with OKEN Scanner

a) Determinați a știind că: $|f(2)| = 4$.

b) Pentru $a = \frac{1}{2}$ determinați punctul de pe graficul funcției f, pentru care ordonata este de două ori mai mare decât abscisa și apoi trasați graficul lui f.

III. 1. Într-un trapez isoscel $ABCD$ cu $AB \| CD$, $AB = a$ și $CD = b$ ($a > b > 0$, fixate), dreapta CE este perpendiculară pe BC, E fiind mijlocul lui $[AD]$. Dacă S este aria trapezului arătați că: a) $S = \frac{1}{4} \cdot (a+b)\sqrt{(a-b)(a+3b)}$; b) $S < \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$.

2. În planul (α) al triunghiului isoscel ABC cu $AB = AC = a$ și $m(\sphericalangle BAC) = 120°$, se consideră BM și CN perpendiculare pe (α) astfel încât M și N sunt de aceeași parte a planului (α). Dacă $BM = x$ și $CN = y$, calculați MN în funcție de a, x și y, iar apoi arătați că:

$$m(\sphericalangle MAN) = 90° \Leftrightarrow a^2 = 2xy.$$

3. Arătați că volumul unui con circular drept circumscris unei sfere este egal cu produsul ariei totale prin a treia parte din raza sferei.

TESTUL 21

I. 1. Dacă $a = 2^5 \cdot 5^3 \cdot (10)^{11}$ și $b = 2^3 \cdot 3^9 \cdot 6^9$, arătați că a și b sunt pătrate perfecte.

2. Determinați x din proporțiile: a) $\frac{0,1(6) - x}{0,1(6) + x} = \frac{3}{4}$; b) $\frac{\frac{1}{5} + x}{\frac{2}{3} - x} = 0,11$.

3. Într-un bazin sunt două robinete. Deschizând unul dintre robinete, după trei ore bazinul se umple până la jumătate, moment în care se deschide și al doilea robinet și astfel după două ore bazinul s-a umplut. Care este capacitatea bazinului știind că prin al doilea robinet curg 21 litri de apă pe oră.

II. 1. Rezolvați în $\mathbf{R}$ ecuațiile: a) $\sqrt{|x| - 1} = 2$; b) $x + |2x - 1| = 2$.

2. Se consideră fracția: $E(X) = \dfrac{(4X-1)^2 - (2X+3)^2}{9X^2 - 1 - \left(3X^2 + X\right)}$.

a) Determinați $a \in \mathbf{R}$ pentru care $E(a)$ este corect definită.

b) Scrieți fracția sub formă ireductibilă.

c) Determinați $A \cap B$, $A \cup B$ și $A - B$, unde:

$$A = \{x \in \mathbf{R} \mid E(x) \leq 0\}, \quad B = \{x \in \mathbf{Z} \mid E(x) \in \mathbf{Z}\}.$$

3. Dacă $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x + a$, ($a \in \mathbf{R}$, fixat), arătați că:

$$\frac{f(x+1) + f(x-1)}{2} = f(x), (\forall) x \in \mathbf{R}.$$

III. 1. Se consideră un cerc de rază egală cu 1 cm și fie M și N două puncte pe cerc, iar P proiecția lui M pe tangenta în N la cerc. Arătați că: $\frac{MN^2}{MP} = 2$.

2. Într-un paralelipiped dreptunghic diagonalele fețelor au lungimile egale (în centimetri) cu a, b și c. Calculați lungimea diagonalei paralelipipedului și volumul său.

3. Raza, lungimea, înălțimea și lungimea generatoarei unui con circular drept sunt invers proporționale cu numerele 20, 15 respectiv 12. Știind că suma celor trei mărimi amintite anterior este egală 12, calculați volumul sferei înscrise în cerc.

Scanned with OKEN Scanner

TESTUL 22

I. 1. Calculați: $\left|(0,1(3))^2-0,23\right|:1\frac{1}{2}+\frac{0,1+0,2}{0,2-0,1}\cdot 10^2$.

2. Determinați $n\in\mathbf{N}$ pentru care numărul $A=4n^2+4n+9$ este pătrat perfect.

3. Determinați numărul de două cifre $\overline{ab}$ știind că: $\frac{2a+3b}{3a+b}=\frac{13}{9}$.

II. 1. a) Arătați că: $\frac{1}{k^2}<\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}$, $(\forall)k\in\mathbf{N}$, $k\geq 2$.

b) Folosind eventual rezultatul de la punctul a) să se demonstreze că pentru orice $n\in\{2,3,\ldots,10\}$ există inegalitatea: $\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}<\frac{1}{10^2}$.

2. Rezolvați în $\mathbf{R}$ ecuația: $\max(1,x)+\min(1,x)=3x$.

3. Să se traseze graficul funcției $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, unde $f(x)=\begin{cases}2, & x\leq 0\\ x+2, & x>0\end{cases}$.

III. 1. În dreptunghiul $ABCD$ bisectoarea unghiului ABC și diagonala $[BD]$ formează între ele un unghi de măsură egală cu 15°. Dacă bisectoarea unghiului ABC întâlnește pe AC în P și DC în E, iar $AC\cap BD=\{O\}$, arătați că triunghiurile COE și POE sunt isoscele.

2. Fie $ABCA'B'C'$ un trunchi de piramidă triunghiulară regulată cu $AB=6$ cm, $A'B'=3$ cm, iar măsura unghiului format de AA' cu planul (ABC) este egală cu 60°. Calculați:

a) aria totală și volumul piramidei;

b) lungimea înălțimii piramidei din care provine trunchiul de piramidă.

3. Unei sfere îi este circumscris un trunchi de con circular drept în care generatoarea formează cu planul bazei mari un unghi de măsură egală cu 45°. Arătați că aria laterală a trunchiului de con este egală cu dublul ariei sferei.

TESTUL 23

I. 1. Determinați x știind că: $[(x:32-20):15\cdot 4000-192000]:40=800$.

2. Să se determine două numere naturale știind că raportul lor este $\frac{3}{13}$, iar media lor aritmetică este 32.

3. Comparați numerele $a=3+6+9+\ldots+300$ și $b=2+4+6+\ldots+1000$.

II. 1. Rezolvați în mulțimea numerelor întregi sistemul de inecuații: $\begin{cases}|x+2|\leq 5\\ \frac{2x+1}{x-2}>0\end{cases}$.

2. Se consideră polinomul cu coeficienți reali

$$P(X)=(X-2)^3+a(X-2)^2+a(X-2)+1.$$

a) Scrieți polinomul $P(X)$ sub formă canonică.

b) Determinați valoarea lui a știind că polinomul $P(X)$ este divizibil cu $3X+1$.

3. Determinați constantele reale m, n și p știind că:

$$\frac{1}{X^3-3X+2}=\frac{m}{(X-1)^2}+\frac{n}{X-1}+\frac{p}{X+2}.$$

III. 1. Se consideră un trapez isoscel $ABCD$ cu $AB\parallel CD$ ($[AB]$ fiind baza mare) având lungi-

Scanned with OKEN Scanner

mea înălțimii egală cu 6 cm. Raportul lungimilor bazelor este egală cu $0,(6)$, iar semisuma lungimilor bazelor este de 12,5 cm. Prin punctul de intersecție a diagonalelor trapezului se duce o dreaptă paralelă cu bazele care taie pe AD în M și pe BC în N.

a) Calculați perimetrul trapezului. b) Arătați că: $DC \cdot BN = AB \cdot NC$.

2. Dacă $ABCDA'B'C'D'$ este un cub, iar distanța dintre centrul de greutate al triunghiului $AB'C$ și centrul cercului înscris în triunghiul $A'D'C'$ este egală cu 1 cm, calculați volumul cubului.

3. Calculați aria laterală și volumul conului circular drept care are lungimea generatoarei egală cu dublul razei bazei conului și care este înscris într-o sferă de rază egală cu 2 cm.

TESTUL 24

I 1. Efectuați: a) $\left(-\frac{2}{3}\right)^3 + (-1)^3 \cdot (-4) - (-2)^4 \cdot \left(\frac{1}{2^2}\right)^2$; b) $\frac{1+\frac{1}{0,(3)}}{1-\frac{1}{0,(3)}} + \frac{1+\frac{1}{0,1(3)}}{1-\frac{1}{0,1(3)}}$.

2. Dacă împărțim numerele 9428 și 3235 prin același număr natural obținem respectiv restul 13 și 7. Determinați împărțitorul.

3. Arătați că $N = 10 \cdot 13 \cdot 62 \cdot 65 \cdot 128 \cdot 248$ este pătrat perfect și apoi calculați $\sqrt{N}$.

II 1. a) Arătați că: $x^2 - 5x + 7 > 0$, $(\forall) x \in \mathbf{R}$.

b) Demonstrați inegalitatea $\frac{2x^2 - 17x + 20}{x^2 - 5x + 7} \leq 3$, $(\forall) x \in \mathbf{R}$ și precizați cazul de egalitate.

2. Simplificați fracția $F(X) = \frac{X^6 + X^4 - X^2 - 1}{X^3 - X^2 + X - 1}$ și determinați valorile întregi ale lui α pentru care $|F(\alpha)| \leq \alpha^2 + 1$.

3. Se consideră funcția $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) = ax + b$, unde $a, b \in \mathbf{R}, a \neq 0$. Știind că $f(-1) - 1 = f(2) + 1 = 3$ să se determine a și b și să se traseze apoi graficul funcției $g: \mathbf{R} \to \mathbf{R}, g(x) = f(3x), (\forall) x \in \mathbf{R}$.

III 1. Calculați aria trapezului isoscel $ABCD$ cu $AB \| CD$, $AB = a$, $CD = b$, ($a > b > 0$, fixate) și $AC \perp BC$.

2. Fie $ABCDA'B'C'D'$ o prismă patrulateră regulată dreaptă cu $AB = 10$ cm, în care diagonala $[AC']$ formează cu planul bazei $(ABCD)$ un unghi de măsură egală cu 45°.

a) Calculați aria totală și volumul prismei.

b) Tangenta unghiului format de planele (ABD') și (ABD).

3. Calculați volumul sferei a cărei arie este egală cu $10\ \text{cm}^2$.

TESTUL 25

I 1. Să se efectueze: $\frac{3\frac{1}{3} \cdot 1,9 + 19,5 : 4\frac{1}{2}}{\left(\frac{62}{75} - 0,16\right) : 10} + \sqrt{10404}$.

2. Determinați numerele naturale de două cifre $\overline{ab}$ cu proprietatea: $\frac{9}{2x + y} \in \mathbf{N}$.

Scanned with OKEN Scanner

3. Un camion transportă pentru o firmă marfă cu o viteză medie de 50 km / h. Pentru a transporta 2,8 t marfă de la o distanță pe care o parcurge într-o oră și un sfert, firma plătește 385000 lei. De la ce distanță s-au transportat 3,2 t marfă dacă s-a plătit 418800 lei ?

II. 1. Fie x și y două numere reale astfel încât $x \in [-3, 7]$ și $y \in [-2, 2]$.

a) Arătați că: $-12 \leq 2x - 3y \leq 23$.

b) Determinați valoarea minimă și cea maximă a expresiilor $x + y$ și $x - y$.

2. Determinați funcția $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ cu proprietatea $f(3x-4) + f(-7) = 2x + 1$, $(\forall)\, x \in \mathbf{R}$ și apoi determinați punctul de pe graficul lui f pentru care coordonatele sunt egale.

3. Calculați câtul și restul împărțirii polinomului $P(X) = X^3 + \sqrt{2} \cdot X^2 + \sqrt{2} \cdot X + 1$ la polinomul $Q(X) = X^2 - 2$.

III. 1. În triunghiul ABC cu $AB = 18$ cm, $AC = 12$ cm și $BC = 24$ bisectoarele unghiurilor ABC și ACB se intersectează în punctul I prin care se duce o paralelă la BC care taie pe AB în M și AC în N. Calculați perimetrul triunghiului AMN.

2. Fie $VABCD$ o piramidă regulată cu vârful V având $AB = 8$ cm și $VA = 5\sqrt{2}$ cm.
a) Calculați aria laterală și volumul piramidei. b) Calculați tangenta unghiurilor formate de muchia laterală, respectiv o față laterală, cu planul bazei. c) Care este drumul cel mai scurt pe care trebuie să-l parcurgă o furnică pe suprafața laterală a piramidei de la A la C ?

3. Un con circular drept are aria totală de $12\pi\left(\sqrt{3}+1\right)$ cm^2 și aria laterală egală cu $12\sqrt{3}\,\pi$ cm^2. Calculați raza conului, volumul conului și aria sferei circumscrise conului.

TESTUL 26

I. 1. Se consideră numerele:
$a = 0,1 + 0,01 + 0,001 + 0,0001$ și $b = 0,1^2 + 0,01^2 + 0,001^2 + 0,0001^2$.
Calculați: a, b, $a+b$, $a-b$, $\dfrac{a+b}{a-b}$ scriind rezultatele sub formă de fracție ordinară.

2. Determinați mulțimile A și B știind că: $A \cup B = \{n \in \mathbf{N} \mid n \text{ divide } 21\}$; $A \cap B = \{n \in \mathbf{N} \mid 3 \vdots n\}$; $B - A = \{n \in \mathbf{N} \mid n + 1 \geq 6\}$.

3. Determinați numerele întregi n pentru care numerele $\dfrac{2n+1}{3}$ și $\dfrac{n+1}{2}$ sunt simultan numere întregi.

II. 1. Dacă $x \in \mathbf{R}$ demonstrați egalitatea:

$$\left(x^6 + x^5 - x^3 + x + 1\right)\left(x^2 - x + 1\right) = x^8 + x^4 + 1.$$

2. Rezolvați în $\mathbf{R}$ ecuația: $\sqrt{4x^2 + 4x + 1} + \sqrt{4x^2 - 4x + 1} = 2$.

3. Se consideră polinomul: $P(X) = \left(4X^2 - 3\right)^{100} + X^{99} + X^{98} + \ldots + X + 1$. Calculați suma coeficienților polinomului ce conține necunoscuta X la puteri pare.

III. 1. Punctele distincte A și B se află pe semicercul cu diametrul $[MN]$ și centrul $\mathcal{C}$, iar punctul P se află pe raza $[CN]$ astfel încât: $m(\widehat{AM}) = 40°$, $m(\sphericalangle CAP) = m(\sphericalangle CBP) = 10°$. Calculați măsura arcului BN.

2. Într-un paralelipiped dreptunghic muchiile bazei au lungimile $AB = 8$ cm, $BC = 6$ cm, iar diagonala paralelipipedului formează cu planul bazei un unghi de măsură 45°. Calculați:

Scanned with OKEN Scanner

a) lungimea înălțimii și lungimea diagonalei pralelipipedului ;
b) aria totală și volumul paralelipipedului.

3. Într-un cilindru circular drept se duce un plan paralel cu generatoarea care taie din cercul bazei un arc de măsură egală cu 120°. Dacă lungimea generatoarei este 10 cm, iar distanța de la centrul cercului de bază la planul secant este egală cu 2 cm, calculați:
a) aria secțiunii ; b) aria totală și volumul conului .

TESTUL 27

I. 1. Calculați: a) $\dfrac{0,8(3):0,625-0,3(6):\frac{11}{35}}{0,2(7)}$; b) $\dfrac{20^{10}}{21^5}\cdot\dfrac{14^4}{45^8}\cdot\dfrac{189^7}{280^6}:\dfrac{2^8}{5^4}$.

2. Determinați numerele de două cifre $\overline{ab}$ care au proprietatea: $a+b+ab=11$.

3. Să se determine cinci numere naturale consecutive pentru care media lor aritmetică este egală cu media armonică a numerelor 4, 8 și 16 înmulțită cu $\frac{7}{3}$.

II. 1. a) Rezolvați în $\mathbf{R}\times\mathbf{R}$ sistemul de ecuații: $\begin{cases} 2,(3)\cdot x+0,1(3)\cdot y=1 \\ x-2y=2 \end{cases}$.

b) Rezolvați în $\mathbf{R}$ inecuația: $\frac{1}{x}+\frac{x}{x+1}\le 1$.

2. Dacă $P(X)=2X^2(X-1)+a(1-X)^3$, determinați numărul real a știind că $P(X)$ este divizibil cu $X+1$, iar pentru $a=2$ descompuneți polinomul în factori ireductibili.

3. Se consideră funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, unde: $f(x)=\begin{cases} ax+1\ , & x\le -3 \\ 2x+a\ , & x>-3 \end{cases}$, $a\in\mathbf{R}$. Determinați a știind că $f(-3)+f(0)=2a+1$ și apoi trasați graficul lui f.

III. 1. Lungimile înălțimilor unui pralelogram sunt direct proporționale cu numerele 2 și 3. Dacă perimetrul paralelogramului este 40 cm, iar măsura unui unghi ascuțit este egală cu 30°, calculați lungimile laturilor și aria paralelogramului.

2. Un trunchi de piramidă triunghiulară regulată are lungimea muchiei laterale egală cu 4 dm, perimetrul bazei mici de $60\sqrt{3}$ cm, iar înălțimea bazei mari de lungime 9 dm.
a) Calculați aria laterală și volumul trunchiului de piramidă.
b) Determinați măsura unghiului format de muchiile laterale cu bazele trunchiului.

3. Un cilindru circular drept cu raza 100 mm este tăiat la capete astfel încât secțiunea făcută prin axa cilindrului are forma unui trapez isoscel cu lungimea laturilor paralele de 1200 mm și 1600 mm. Calculați volumul cilindrului.

TESTUL 28

I. 1. Demonstrați egalitățile:

a) $7^n+6\left(7^n+7^{n+1}+7^{n+2}+7^{n+3}\right)=7^{n+4}$, $(\forall)n\in\mathbf{N}$;

b) $\dfrac{3^n+2\cdot 3^{n+1}+2^2\cdot 3^{n+2}}{2^n+3\cdot 2^{n+1}+3^2\cdot 2^{n+2}}=\dfrac{3^n}{2^n}$, $(\forall)n\in\mathbf{N}$.

2. Suma a trei numere naturale este egală cu 1000. Determinați aceste numere știind că al doilea număr împărțit la primul număr dă restul zero și câtul 7, iar al treilea număr

Scanned with OKEN Scanner

împărțit la al doilea număr dă câtul 9 și restul 6.

3. Comparați numerele: $a=-(-3)^2+\frac{1}{3}-\frac{3}{2}$, $b=\sqrt{0,16}-\left(\frac{4}{3}\right)^2$.

II 1. Rezolvați în $\mathbf{R}$ inecuația: $3\left(x-\frac{1}{2}\right)-2\left(2x+\frac{1}{3}\right)+5\left(\frac{x}{5}-\frac{1}{6}\right)\le x-1$.

2. Determinați cel mai mare divizor comun al polinoamelor:
$P(X)=X^4+2X^3-3X^2-8X-4$ și $Q(X)=X^3+6X^2+11X+6$
și descompuneți polinomul $P(X)+Q(X)$ în factori ireductibili.

3. Determinați cea mai mare valoare pe care o poate lua expresia $f(x)=-x^2-3x+5$, unde $x\in\mathbf{R}$.

III 1. Fie $[AD]$ înălțime în triunghiul ABC ($D\in(BC)$), iar O punctul în care perpendiculara în D pe AC întâlnește bisectoarea unghiului DAC. Arătați că triunghiul DOM este isoscel știind că M este punctul în care bisectoarea unghiului DAC intersectează pe BC.

2. Se consideră un triunghi dreptunghic ($m(\sphericalangle BAC)=90°$) cu $AB=20$ cm, $AC=15$ cm, iar pe perpendiculara în A pe planul (ABC) se ia punctul M astfel ca $AM=AA'$ unde A' este mijlocul lui $[BC]$.
a) Calculați lungimea segmentului $[AM]$ și aria triunghiului ABC;
b) Calculați distanța de la A la planul (MBC).

3. Un con circular drept are raza egală cu 5 cm, iar generatoarea sa formează cu planul bazei un unghi de măsură 60°. Calculați volumul și aria totală a cilindrului care are înălțimea congruentă cu cea a conului și una din baze fiind baza conului dat.

TESTUL 29

I 1. Calculați: a) $\left(10625-5^4\right):0,001^3$;

b) $\left\{\left[\left(27520:32-2^2\cdot5\right):15\cdot4000-2^6\cdot3\right]:40\right\}:\left(2^3\cdot10\right)$.

2. Determinați numărul $\overline{ab}$ știind că $\sqrt{\overline{ab}+\overline{ba}+121}$ este număr rațional.

3. Dintr-un port pleacă la aceeași oră trei vapoare astfel încât: primul vapor face cursa (dus-întors) în 120 de ore, al doilea vapor parcurge aceeași cursă în 7560 de minute, iar al treilea vapor parcurge respectiva cursă în 777600 de secunde. După câte ore vor pleca din nou toate vapoarele la aceeași oră ?

II 1. Dacă a este un parametru real, rezolvați în $\mathbf{R}$ ecuația: $a(|x|-1)=x^2-1$.

2. a) Arătați că:
$$\frac{1}{\sqrt{2k-1}}-\frac{1}{\sqrt{2k+1}}=\frac{2}{(2k+1)\sqrt{2k-1}+(2k-1)\sqrt{2k+1}},\ (\forall)k\in\mathbf{N}^*.$$
b) Demonstrați inegalitățile: $\frac{3}{10}<\frac{1}{3+\sqrt{3}}+\frac{1}{5\sqrt{3}+3\sqrt{5}}+\frac{1}{7\sqrt{5}+5\sqrt{7}}<\frac{1}{3}$.

3. Se consideră funcția liniară $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ cu proprietatea: $f(f(x))+f(x)=2x,\ (\forall)x\in\mathbf{R}$.
a) Determinați funcția f și trasați graficul funcției $g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $g(x)=x+\sqrt{(f(x))^2}$.
b) Calculați aria triunghiului determinat de graficul funcției f, axa Ox și dreapta de ecuație $y=1-x$.

III 1. În triunghiul ABC notăm cu I intersecția bisectoarelor unghiurilor B și C. Arătați că

Scanned with OKEN Scanner

triunghiul ABC este dreptunghic dacă și numai dacă $m(\sphericalangle BIC) = m(\sphericalangle BAC) + 45°$.

2. În vârful C al triunghiului isoscel ABC se ridică o perpendiculară pe planul triunghiului pe care se consideră un punct M astfel încât distanța de la M la AB este egală cu d. Dacă $m(\sphericalangle BAC) = 30°$, iar $AB = AC = b$, determinați lungimea segmentului CM și distanța de la C la planul (MAB).

3. Două conuri circulare drepte au aceeași arie laterală, iar generatoarele lor determină cu planul bazei unghiuri cu măsura de 45° și respectiv 30°. Arătați că pătratul raportului lungimilor înălțimilor este egal cu $\sqrt{6}$.

TESTUL 30

I. 1. Calculați: $\dfrac{0,(81)+0,(63)}{\frac{43}{209}-\frac{10}{90}} - \dfrac{\left(\frac{15}{2}+\frac{75}{7}-16\frac{2}{3}\right):32\frac{1}{2}}{71-70\frac{20}{21}} + 32,7:4,36.$

2. A treia parte a unui număr a fost micșorat cu 4 și apoi s-a înmulțit rezultatul obținut cu 5. La produsul astfel obținut s-a adăugat numărul 8 și apoi s-a împărțit prin 7 obținându-se câtul 39. Care este numărul cu care s-au început calculele ?

3. Determinați A și B știind că $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $A \cap B = \varnothing$ și că pentru orice element $x \in A$ există un element $y \in B$ astfel încât $x - y = 2$.

II. 1. Rezolvați în mulțimea numerelor reale:

a) $|x-1| - x \le 1$; b) $mx + 1 = m^2(x+1)$, $m \in \mathbf{R}$;

c) $\begin{cases} \frac{1}{y+1} - x = 2 \\ x \in \mathbf{Z},\ y \in \mathbf{Z} \end{cases}$; d) $\begin{cases} 2x + 3y + \frac{4}{2x+3y} = 4 \\ x \in \mathbf{Z},\ y \in \mathbf{Z} \end{cases}$

2. Se consideră expresiile:

$$E(x) = \frac{(x+1)^2 + 2(x+1) + 1}{x^3 - 6x^2 + 12x - 8}, \quad F(x) = \frac{8 - x^3}{-4x^2 - 8x - 16}.$$

a) Determinați valorile reale ale lui x pentru care expresiile sunt definite și rezolvați în $\mathbf{R}$ ecuațiile: $E(x) = 0$, $F(x) = 0$.

b) Calculați media geometrică a acestor expresii.

c) Valoarea lui x dată de relația $\dfrac{5\frac{2}{3}+\frac{1}{9}}{x} = \dfrac{2,1(6)}{\sqrt{0,5625}}$ face parte din mulțimea valorilor admise ale mediei geometrice de la punctul b) ?

3. Dacă $P(X) = \left(X^2 - 2\right)^{202} - X^2 + X - 1$, calculați restul împărțirii acestui polinom prin polinomul $X^2 - 1$.

III. 1. Măsurile unghiurilor unui triunghi sunt proporționale cu numerele 5, 6 respectiv 7. Calculați măsura unghiului format de înălțimea și bisectoarea celui mai mare unghi.

2. Vârful A al pătratului $ABCD$ este situat în planul (α), iar AB și AD formează cu planul (α) unghiuri congruente. Dacă B', C', D' sunt proiecțiile punctelor B, C respectiv D pe planul (α), $AB = 1$ cm, iar $m(\sphericalangle BAB') = 30°$, determinați: poziția lui BD față de planul (α), natura patrulaterului $AB'C'D'$, lungimea lui $[AC']$ și măsura unghiului format de

Scanned with OKEN Scanner

planul $(ABCD)$ cu planul (α).

3. Se consideră conul care are ca bază intersecția dintre o sferă și un plan, iar vârful în centrul sferei. Determinați distanța de la centrul sferei la plan astfel încât aria laterală a conului și aria calotei mici determinată de plan să fie egale.

TESTUL 31

I. 1. Determinați x știind că: $\left[x-\left(18\frac{7}{8}-5\frac{1}{4}\right)\cdot\left|10\frac{1}{2}-7\frac{2}{3}\right|\right]:22\frac{7}{18}=\frac{1}{8}$.

2. Determinați numerele prime de două cifre știind că suma cifrelor sale este egală cu 5.

3. Pe o dreaptă se iau patru puncte distincte A, B, C, D în ordinea dată. Arătați că: $AC^2+BC\cdot CD+BD\cdot DC=BD^2+AB\cdot AC+AB\cdot BC$.

II. 1. Determinați funcția $f:[-1,1]\to\mathbf{R}$ știind că triunghiul ABC este provenit din graficul funcției f și segmentul $[BC]$ unde $B(-1,0)$, $C(1,0)$ și $A(0,2)$.

2. Se consideră polinomul $P(X)=X^2-3X+a$, unde a este un parametru real.
a) Determinați a știind că restul împărțirii polinomului $P(X+1)$ prin polinomul $X-1$ este egal cu 2.
b) Pentru $a=4$ calculați $P\left(3-\sqrt{3}\right)+P\left(3+\sqrt{3}\right)$ și determinați cea mai mică valoare a lui $P(t)$, unde $t\in\mathbf{R}$.

3. Descompuneți în factori ireductibili expresia:
$$E(X)=\left(X^2+X+1\right)^2-\left(X^2+X-1\right)^2.$$

III. 1. Pe laturile triunghiului echilateral ABC cu lungimea laturii egală cu 1 cm se consideră punctele $D\in(BC)$, $E\in(AC)$, $F\in(AB)$ astfel încât: $\frac{BD}{DC}=\frac{AE}{EC}=\frac{AF}{FB}=3$. Calculați raportul ariilor triunghiurilor ABC și DEF.

2. Se consideră un cub care are lungimea diagonalei egală cu a ($a>0$, fixat). Calculați sinusul unghiului determinat de diagonala cubului cu planul bazei cubului.

3. Secțiunea axială a unui cilindru este un dreptunghi cu lungimea diagonalei egală cu 4 cm, iar diagonala secțiunii formează cu planul bazei cilindrului un unghi de măsură egală cu 30°. Calculați aria totală și volumul cilindrului.

TESTUL 32

I. 1. Calculați valoarea numerică a expresiei $E(x)=1+\dfrac{1+\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{x}}}$, pentru:
$$x=\sqrt{5^2-4^2}-\frac{4}{3}.$$

2. Dacă $A=\left\{x\in\mathbf{N}\,|\,x=\dfrac{3y+1}{y+5},\ y\in\mathbf{Z}\right\}$ și $B=\{x\in\mathbf{Z}\,|\,|2x-1|<1\}$, determinați mulțimile: A, B, $(A-B)\cup(A\cap B)$, $\mathbf{Z}-A$, $\mathbf{Z}-(A\cup B)$.

3. Arătați că dacă d este un divizor natural al numerelor $2n+3$ și $3n+2$ unde $n\in\mathbf{N}$

atunci $d \in \{1, 5\}$.

II. 1. Scrieți în ordine crescătoare numerele: $a = \sqrt{3} + \sqrt{5}$, $b = \sqrt{2} + \sqrt{6}$, $c = \sqrt{4} + \sqrt{7}$.

2. Rezolvați în mulțimea numerelor reale sistemul de ecuații:

$$\begin{cases} \frac{1}{x-y} + \frac{2}{x+y} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \\ \frac{2}{3x-3y} - \frac{1}{5x+5y} = \frac{1}{3} - \frac{1}{40} \end{cases}.$$

3. Calculați câtul și restul împărțirii polinomului $P(X) = X^5 + X^4 + X^3 + X^2 + X - 1$ la polinomul $(X+1)\left(X^2+1\right)$.

III. 1. Câte triunghiuri există astfel încât lungimile laturilor (exprimate în centimetri) să fie numere întregi al căror produs este egal cu 60 cm^2 ?

2. La un paralelipiped dreptunghic se mărește o dimensiune cu x, alta cu $2x$ și a treia dimensiune cu $3x$. Dacă după aceste măriri ale dimensiunilor aria totală a paralelipipedului rămâne neschimbată, determinați x știind că cele trei dimensiuni sunt direct proporționale cu numerele 2, 5 și 7, iar diagonala paralelipipedului are lungimea egală cu 9 cm.

3. Determinați volumul și aria laterală a unui trunchi de con, cunoscând că perimetrul bazei mari este 20π cm, aria bazei mici este egală cu $0,9\pi$ mm^2, iar generatoarea are lungimea egală cu 0,13 m.

TESTUL 33

I. 1. Numărul 190 se împarte proporțional cu numerele $1\frac{2}{3}$, $3\frac{4}{5}$ și $2\frac{1}{3}$. Ce procent revine fiecărei părți ?

2. Arătați că oricare ar fi cifra a ($a \neq 0$), numărul $N = \overline{aa1}^2 + \overline{a1} + 1$ nu poate fi pătrat perfect și apoi determinați a astfel încât N să fie divizibil cu 3.

3. Determinați x, y numere întregi știind că: $xy + 1 = 2x + y$.

II. 1. Se consideră expresiile: $E(x,y) = 2x^3 - 2x^2y + xy^2 + 7y^3$; $F(x,y) = 3x^3 - 6x^2y - 2xy^2 + 5y^3$; $G(x,y) = 2x^3 - 3x^2y - 4xy^2 - 3y^3$. Descompuneți în factori ireductibili expresia: $P(x,y) = E(x,y) - (F(x,y) - G(x,y))$.

2. Dacă m este un parametru real, rezolvați în $\mathbf{R}$ ecuația: $\frac{x}{|x|+1} = m$.

3. Reprezentați geometric graficul funcției $f: [-5, 7] \to \mathbf{R}$, unde:

$$f(x) = \begin{cases} 3x + 1, & -5 \leq x < 1 \\ 4x, & 1 \leq x \leq 7 \end{cases}.$$

III. 1. a) În triunghiul ABC cu $m(\measuredangle ABC) = 64°23'$, bisectoarea unghiului ABC și cea a unghiului ACB se întâlnesc în I. Știind că $m(\measuredangle BIC) = 126°9'$, determinați măsurile unghiurilor BAC și ACB.

b) Un trapez isoscel are lungimea bazei mari de trei ori cât lungimea bazei mici, iar lungimea înălțimii trapezului este egală cu dublul lungimii bazei mici. Arătați că diagonalele trapezului sunt perpendiculare.

2. Se consideră două piramide regulate una pătratică, alta hexagonală. Dacă latura bazei piramidei pătratice este de două ori cât latura bazei piramidei hexagonale, iar raportul

Scanned with OKEN Scanner

înălțimilor celor două piramide este egal cu raportul laturilor bazelor, determinați raportul volumelor și raportul ariilor laterale ale celor două piramide.

3. Un trunchi de con se taie cu un plan de-a lungul axei sale, secțiunea determinată fiind un trapez isoscel cu aria de $210\,dm^2$. Determinați aria totală a trunchiului de con știind că lungimea înălțimii trapezului este egală cu 168 cm, iar diferența lungimilor bazelor trapezului este egală cu 0,6 m.

TESTUL 34

I 1. Dacă $9^{n+1} = a\,(a,\ n \in \mathbf{N}^*)$, calculați în funcție de a valoarea numerelor $3^{4n+5} + 81^{n+3}$ și 27^n.

2. Determinați $x \in \mathbf{Q}$ știind că: $(2 + 4 + \ldots + 202) : x = 1 + 3 + 5 + \ldots + 201$.

3. Arătați că numărul $A(n) = 31^n - 27^n - 26^n + 2^n$ este divizibil cu 5^2 pentru orice $n \in \mathbf{N}$.

II 1. Descompuneți în factori ireductibili:

a) $X^2 + 10X + 9$; b) $(3X + 1)^3 + (3X - 1)^3$;

c) $X^3 - 3X + 2$; d) $X^4 + 4X^2 + 3$.

2. Se consideră polinomul de grad maxim 3 care îndeplinește condițiile:

(i) $P(X) + 1$ este divizibil cu $X - 1$;

(ii) restul împărțirii polinomului $P(X) - 1$ la polinomul $X^2 - 4$ este egal cu 1.

Determinați câtul și restul împărțirii polinomului $P(X)$ la polinomul $X^2 - X$.

3. Se consideră expresia $E(x) = \sqrt{2x + 1 + 2\sqrt{2x}} + \sqrt{2x + 1 - 2\sqrt{2x}}$, unde $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$. a) Calculați $(E(x))^2$. b) Rezolvați în $\mathbf{R}$ ecuația: $E(x) = \sqrt{7x+1}$.

III 1. Dacă D este un punct oarecare pe latura $[BC]$ a unui triunghi ABC, iar $M \in (AD)$ astfel încât $AM = MD$, calculați valoarea raportului ariilor triunghiurilor BMC și ABC.

2. În centrul O al unui cerc se ridică o perpendiculară pe planul cercului pe care se consideră un punct M astfel încât $MO = x$, unde x este rădăcina ecuației:

$$\frac{2x}{3} + \frac{\frac{3x-5}{4} - \frac{5x-3}{6}}{\frac{4x-3}{9} - \frac{2x-5}{4}} = \frac{2x-4}{3}.$$

Calculați aria laterală a piramidei cu vârful în M și baza triunghiul echilateral înscris în cercul de centru O știind că aria bazei este egală cu $9\sqrt{3}\ cm^2$.

3. Un trunchi de con circular drept are razele bazelor și generatoarea proporționale cu numerele 3, 5 și 8, iar înălțimea are lungimea egală cu 16 cm. Calculați aria totală și volumul trunchiului de con.

TESTUL 35

I 1. Caculați în funcție de valorile naturale ale numerelor m și n expresia:

$$E(m, n) = \frac{(-1)^{m+n} - 2\cdot(-1)^n + (-1)^m}{(-1)^m \cdot (-1)^n \cdot (-1) + (-1)^{m+1} \cdot (-1)^{n+1} + 3}.$$

Scanned with OKEN Scanner

2. Arătați că: $\left(10010_{(2)} + 1120_{(3)}\right) \cdot 121_{(4)} - 4000_{(5)} = 32_{(6)} \cdot 101_{(7)}$, unde indicii desemnează bazele de numerație în care sunt scrise numerele.

3. Determinați cel mai mic număr natural care împărțit la 3, 4, 5, 8 și 9 dă de fiecare dată restul 2 și câtul diferit de zero.

II. 1. Determinați mulțimile: $A = \left\{x \in \mathbf{Z} \mid \frac{3x+1}{-(x-1)} \geq 0\right\}$, $B = \{x \in \mathbf{N} \mid |x+1| = |2x|\}$.

2. Se consideră expresia: $E(x, y) = \left[\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{2}{x+y} \cdot \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)\right] : \frac{x^3 + y^3}{x^2 y^2}$.

a) Determinați condițiile pentru care expresia este corect definită și scrieți $E(x, y)$ sub formă ireductibilă.

b) Determinați $x \in \mathbf{R}$ pentru care: $E(x, 2x+1) = \left(\frac{7}{3}\right)^{-1}$.

3. Determinați funcția $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ cu proprietatea $f(x+1) = 2x + 1 + 2f(0)$, $(\forall) x \in \mathbf{R}$ și determinați apoi coordonatele punctului de intersecție dintre graficul lui f și dreapta de ecuație $y = 1$.

III. 1. Fie E și F mijloacele laturilor $[AD]$ și $[BC]$ ale patrulaterului convex $ABCD$, iar I intersecția diagonalelor $[AC]$ și $[BD]$. Dacă $AD \| BC$ arătați că $I \in [EF]$.

2. În vârful B al triunghiului dreptunghic ABC cu $m(\sphericalangle BAC) = 90°$ se ridică perpendiculara BB' pe planul (ABC) pe care se consideră un punct M. Dacă P este proiecția lui B pe AM, iar Q este proiecția lui B pe MC arătați că:

a) $MP \cdot MA = MQ \cdot MC$; b) $MC \perp (PBQ)$.

3. Într-un trunchi de con circular drept generatoarea are lungimea 10 cm, iar dublul razei bazei mici este cu 15 cm mai mare decât jumătatea razei bazei mari. Dacă raportul dintre raza mare micșorată cu 6 cm și suma celor două raze este egal cu $\frac{2}{5}$, calculați:

a) razele bazelor ; b) volumul trunchiului de con ; c) aria și volumul sferei cicumscrisă trunchiului de con.

TESTUL 36

I. 1. Să se calculeze valoarea numerică a raportului $\frac{ab + cd}{bc - ad}$, pentru: $a = 1{,}3\,(6)$; $b = 0{,}11$; $c = 3\frac{1}{3}$; $d = \frac{2}{6}$.

2. Fie a, b, c numere reale, astfel încât: $\frac{3a}{2} = \frac{4b}{3} = \frac{5c}{4}$. Dacă $a + b + c < 133$, demonstrați că: $\frac{a}{40} + \frac{b}{45} + \frac{c}{48} < 3$.

3. Determinați valorile naturale ale lui a pentru care numărul $\sqrt{a^2 - 4}$ este număr natural.

II. 1. Se consideră fracția: $F(x, y) = \frac{x^3 - (2y-1)x^2 + 2xy^2 - 4y^3 + 2y^2}{4y^3 + 2(x+1)y^2 + 2yx^2 + x^3 + x^2}$. Determinați valorile naturale a și b pentru care $F(a, b)$ are sens și apoi aduceți fracția $F(a, b)$ sub formă ireductibilă.

Scanned with OKEN Scanner

2. Dacă m este parametrul real, rezolvați în $\mathbf{R}$ ecuația: $\frac{mx+1}{2}+\frac{2mx+1}{4}=3mx$.

3. Se consideră funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, unde $f(x)=\begin{cases} x-1, & x\le 1 \\ x, & x>1 \end{cases}$. a) Calculați valoarea expresiei: $\left|f\left(\sqrt{2}\right)\right|-f(1)-f\left(\sqrt{2}\right)$; b) Trasați graficul funcției f.

III. 1. Prin vârful A al triunghiului oarecare ABC se duce o dreaptă d paralelă cu BC, iar bisectoarele unghiurilor ABC și ACB intersectează pe d în M și N. Arătați că: $MN=AB+AC$.

2. Fie triunghiul oarecare ABC și M un punct care nu aparține planului (ABC) astfel încât $MA\perp BC$. Dacă $MP\perp(ABC)$, $P\in(ABC)$ și $AQ\perp(MBC)$, $Q\in(MBC)$, arătați că MP și AQ sunt concurente.

3. Se consideră un trunchi de con circular drept care are diferența dintre raza bazei mari și raza bazei mici egală cu 5, iar înălțimea sa egală cu 12. a) Calculați lungimea generatoarei trunchiului de con. b) Știind că raza mare și raza mică sunt direct proporționale cu numerele 12, respectiv 7, calculați aria totală și volumul trunchiului de con, precum și aria laterală a conului care are vârful în centrul bazei mici a trunchiului de con, baza coincizând cu baza mare a trunchiului de con.

TESTUL 37

I. 1. Comparați numerele $a=2^{132}-2^{131}+2^{130}$ și $b=27^{22}$.

2. Determinați ultima cifră a numărului $A=101^{101}+102^{102}+103^{103}$ și arătați că $A+3$ este divizibil cu 5.

3. a) Calculați: $\left(3+\sqrt{3}\right)^2+\left(3-\sqrt{3}\right)^2$; b) Dacă $a,b\in\mathbf{Z}$, arătați că numărul $a\sqrt{12+6\sqrt{3}}+b\sqrt{12-6\sqrt{3}}$ este întreg dacă și numai dacă $a=b$.

II. 1. Rezolvați în mulțimea $\mathbf{Z}$ sistemul de inecuații: $\begin{cases} \frac{x+3}{x}\le 1 \\ \frac{2x+1}{x-1}\le 1 \end{cases}$.

2. Determinați $a,b\in\mathbf{R}$ știind că polinomul $P(X)=X^3+aX^2+bX+1$ este divizibil cu X^2-3X+2 și apoi rezolvați în $\mathbf{R}$ ecuația $P(x)=0$.

3. Se consideră funcția liniară $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=ax+b$, unde $a,b\in\mathbf{R}$, $a\neq 0$. Determinați a și b știind că graficul său trece prin originea axelor de coordonate și că pentru orice $x\in\mathbf{R}$ are loc egalitatea: $f(f(x))=f(x)$.

III. 1. În triunghiul ascuțitunghic ABC medianele duse din B și C și înălțimea dusă din A au lungimile proporționale cu numerele 4, 5 și respectiv 6. Știind distanța de la centrul de greutate al triunghiului la BC este egală cu 2, calculați aria triunghiului ABC.

2. Se consideră cubul $[ABCDA'B'C'D']$ și fie P mijlocul muchiei $[AB]$, iar Q intersecția dreptelor BC' și CB'. Arătați că: $QD'\perp(CB'P)$.

3. Fie un con circular drept cu lungimea înălțimii de 9 cm. Un plan paralel cu baza conului secționează conul după un cerc a cărui arie este de 9 ori mai mică decât aria bazei conului. a) Calculați distanța dintre planul bazei conului și planul de secțiune. b) În ipoteza că generatoarea conului face cu planul bazei un unghi a cărui tangentă este egală cu $\frac{1}{2}$, determinați volumul și aria laterală ale trunchiului de con care s-a format.

Scanned with OKEN Scanner

TESTUL 38

I **1.** Dacă $x \in \mathbf{N}$ și $(x+1):3^{100}+3^{99}=3^{100}$, calculați valoarea lui x și arătați că $x-1$ este divizibil cu 4.

2. Numărul 100 se împarte proporțional cu numerele $1\frac{1}{2}$, $2\frac{5}{6}$ și $2\frac{1}{3}$. Ce procent revine fiecărei părți ?

3. Arătați că pentru orice număr real a, are loc egalitatea:

$$a(a+4)(a+8)(a+12)+256=\left(a^2+12a+16\right)^{12}.$$

II **1.** Rezolvați în $\mathbf{R}$ ecuația $|3x-1|+x=mx+1$, unde m este parametru real.

2. Determinați polinomul de gradul doi $P(X)$ cu proprietatea că $X+1$ divide polinomul $P(X)+X$, iar restul împărțirii polinomului $P(X)$ la X^2-2 este egal cu $X-2$.

3. Se consideră expresiile: $E_1(x)=\dfrac{1-\dfrac{3x^2}{1-x^2}}{1+\dfrac{x}{1+x}}$, $E_2(x)=\dfrac{1}{1-x}+\dfrac{1}{\frac{1}{x}-1}-\dfrac{2x-1}{1-x}$, $E_3(x)=\dfrac{3}{2}\left[\dfrac{(3x-1)^2}{5}-\dfrac{(x+3)^2}{5}+\dfrac{x(2x-3)}{2}\right]$. a) Determinați valorile reale ale lui x pentru care expresiile $E_1(x)$, $E_2(x)$, $E_3(x)$ are sens și arătați că $E_1(x)+E_2(x)$ are valoarea constantă. b) Pentru ce valori reale ale lui x, media aritmetică a expresiilor $E_1(x)$ și $E_2(x)$ este egală cu $E_3(x)$?

III **1.** În paralelogramul $ABCD$ se duce o dreaptă care trece prin D și care intersectează pe AB în M astfel încât $AB=5\cdot AM$. Dacă N este intersecția lui DM cu (AC), calculați valoarea raportului $\dfrac{AN}{NC}$.

2. Se consideră o piramidă hexagonală regulată având aria bazei egală cu $54\sqrt{3}$ cm^2 și înălțimea de lungime 40 mm. a) Calculați aria laterală și lungimea apotemei piramidei. b) Calculați volumul piramidei triunghiulare care are același vârf cu cel al piramidei hexagonale și ca bază triunghiul ce se obține unind din două în două vârfurile hexagonului de la bază.

3. Dacă înfășurăm o panglică de 2500 cm lungime și 0,1 mm grosime pe o țeavă, se obține un cilindru cu diametrul egal cu 1 dm. Calculați diametrul cilindrului (*fără panglică*).

TESTUL 39

I **1.** Efectuați calculele: $0,375+3\frac{2}{5}:\frac{34}{35}-0,25+\dfrac{\left(\frac{4}{5}\cdot 1.24\right):0,8}{\frac{65-3}{10^2}}$.

2. Dintr-o școală au participat la etapa județeană a olimpiadei de matematică 36 de elevi, adică 40 % din câți au participat la faza pe municipiu. Știind că la etapa pe municipiu au participat 30 % din numărul total al elevilor școlii, determinați câți elevi au participat la etapa pe municipiu.

3. Determinați cifrele x și y dacă numărul $\overline{179xy}$ (*scris în baza zece*) este divizibil cu 120.

Scanned with OKEN Scanner

II. 1. Comparați numerele $a=\sqrt{2-\sqrt{3}}+1$ și $b=\sqrt{3+\sqrt{2}}$.

2. Determinați restul împărțirii polinomului X^4-X prin polinomul X^3-X^2-4X+4.

3. Se consideră mulțimile: $A=\left\{x\in\mathbf{Z}\,|\,\frac{3x+10}{x+5}\in\mathbf{Z}\right\}$, $B=\{x\in\mathbf{N}\,|\,|x-6|\leq 4\}$. Determinați: $A-B$, $B-A$, $A\cup B$, $A\cap(B\cup\{-10,-4,0\})$.

III. 1. Arătați că pătratul lungimii înălțimii corespunzătoare ipotenuzei unui triunghi dreptunghic nu depășește jumătate din produsul lungimilor catetelor.

2. Fie ABC un triunghi dreptunghic isoscel astfel încât ipotenuza $[BC]$ se găsește în planul (α), iar $A\notin(\alpha)$. Știind că planul triunghiului și planul (α), formează între ele un unghi de măsură 45°, aflați măsurile unghiurilor pe care le formează AB și AC cu planul (α).

3. Un rezervor are forma unui trunchi de con circular drept. Știind că raportul dintre razele celor două baze este $\frac{17}{8}$ m, că diferența acestor raze este egală cu 1,8 m și că generatoarea formează cu baza un unghi de măsură 45°, se cere: a) lungimea razelor trunchiului de con ; b) câtă vopsea se va folosi pentru vopsitul rezervorului în exterior știind că pentru 3,14 cm^2 este nevoie de 0,5 g de vopsea ?

TESTUL 40

I. 1. Determinați numărul de două cifre pentru care raportul dintre diferența și suma cifrelor sale este egal cu $\frac{5}{11}$.

2. Se consideră fracțiile $\frac{21}{32}$, $\frac{31}{52}$ și $\frac{40}{57}$. Scrieți fracțiile în ordine crescătoare și intercalați între aceste fracții media lor aritmetică.

3. Un număr de 12 muncitori au construit în 4 zile un zid lung de 60 m, înalt de 3,5 m și gros de 0,4 m. În cât timp muncitorii vor împrejmui cu un zid de aceeași înălțime și gros de 0,5 m, un teren în formă de dreptunghi lung de 40 m și lat de 20 m ?

II. 1. Dacă $a, b, c\in(0,\infty)$ și $a+b+c=1$, arătați că: $\frac{1}{a}+\frac{2}{b}+\frac{3}{c}>6$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=\begin{cases} mx-1, & x<0\\ 2x-1, & x\geq 0\end{cases}$, unde $m\in\mathbf{R}$.

a) Determinați m știind că: $|f(-1)|=f(0)+f(1)$. .

b) Pentru $m=-1$ să se traseze graficul funcției f și să se rezolve în $\mathbf{R}$ ecuația $f(x)=0$.

3. Dacă $P(X)$ este un polinom pentru care $P(a-1)+P(2a-4)=a^3-a^2-a-15$, $(\forall)\,a\in\mathbf{R}$, arătați că $X-2$, divide polinomul $P(X)$.

III. 1. Fie ABC un triunghi ascuțitunghic, A' proiecția lui A pe BC, iar M, N, P simetricele punctului A' față de mijloacele segmentelor $[BC]$, $[CA]$ și $[AB]$. Arătați că patrulaterul $MNPA'$ este un trapez isoscel.

2. Centrele celor patru fețe ale unui tetraedru regulat cu lungimea muchiei egală cu a ($a>0$, fixat) sunt vârfurile unui alt tetraedru regulat. Calculați raportul dintre ariile și apoi raportul dintre volumele celor două tetraedre.

3. Calculați volumul și aria sferei înscrise într-un con care are generatoarea congruentă cu diametrul bazei sale.

*

* *

Scanned with OKEN Scanner

PARTEA A II-A

SOLUȚII, INDICAȚII, RĂSPUNSURI

clasa a V-a

CAP. I. • NUMERE NATURALE •

5. a) 3 cifre; b) 5 cifre; c) 7 cifre; d) 12 cifre; e) 14 cifre. **9.** 9876543, 9123456. **10.** a) 90; b) 900. **12.** a) 1002; b) 99995. **14.** 998 numere pare și 998 numere impare, respectiv 1000 numere pare și 1001 numere impare. **15.** 20 respectiv 199. **16.** 4, 10, 13, 16, 22. **17.** $e \le c \le a \le d \le b$. **20.** a) $2534 + 8567 = 11101$; b) $4238 + 8561 + 3425 = 16224$; c) $43060 - 10564 = 32496$; d) $11101 - 8567 = 2534$. **22.** $(505 - 414) - (323 - 232) = 0$; b) $(550 - 441) - (332 - 223)$ etc. **23.** a) 0; b) 1. **24.** a) 8; b) 9. **25.** a) 4; b) 3. **27.** $a = 1996$, $b = 217996$, $c = 1936$, $d = 2000056$. **28.** 139. **29.** 820. **30.** 10.000 dacă 1996 este primul număr, etc. **32.** a) 6169; b) 6605. **33.** 500. **34.** 1080 respectiv 1375. **35.** 38331. **36.** a) 8769; b) 136653. **38.** a) 22; b) 9; c) 9. **39.** a) 105; b) 80. **40.** a) $451 \cdot 99 = 44649$; b) $761 \cdot 85 = 64685$; c) $115 \times 41 = 4715$; d) $221 \times 22 = 4862$ sau $222 \times 21 = 4662$. **43.** a) 0; b) 0. **45.** a) 495; b) 4545; c) 450. **46.** 0. **47.** 6400. **48.** 3663. **49.** 1. **50.** a) produsul se mărește de două ori; b) produsul se triplează; c) produsul se mărește de 6 ori; d) produsul se mărește cu al doilea număr. **52.** 3. **53.** 00. **56.** $n+2 < 2n+1 < 2n+3 < 3n+2$. **57.** $n-2 < 2n-3 < 2n-1 < 3n-2$. **62.** a) $110768 : 112 = 989$; b) $4862 : 221 = 22$ sau $4662 : 222 = 21$. **63.** a) $1155 = 33 \cdot 35$; $111555 = 333 \cdot 335$; $11115555 = 3333 \cdot 3335$; b) $4488 = 66 \cdot 68$; $444888 = 666 \cdot 668$; $44448888 = 6666 \cdot 6668$. **66.** 0, 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80. **67.** 1477, 1478, 1479, 1480, 1481, 1482, 1483. **68.** opt numere. **69.** 103; 999. **70.** 70 numere. **71.** 0, 27, 54, 81. **72.** 1112, 1120, 1121. **73.** $d = 213$, $i = 37$. **74.** 14700. **75.** 1077, 1087, 1175, 1186. **76.** Deoarece avem patru numere diferite și trei resturi posibile, două din cele patru numere dau același rest la împărțirea cu 3, deci diferența lor se împarte exact la 3. **79.** a) $x = 4$; b) $x = 42$; c) $x = 20$; d) $x = 9$; e) $x = 4$; f) $x = 4$. **80.** a) $8^3 = 2^9 < 2^{10}$; b) $32^{20} = \left(2^5\right)^{20} = 2^{100}$ și $16^{25} = \left(2^4\right)^{25} = 2^{100}$ deci $16^{25} = 32^{20}$; c) $9^3 = \left(3^2\right)^3 = 3^6$ și $27^2 = \left(3^3\right)^2 = 3^6$ deci $9^3 = 27^2$; d) $2^9 = \left(2^3\right)^3 = 8^3$ și $3^6 = \left(3^2\right)^3 = 9^3$; e) $2^{45} = \left(2^3\right)^{15} = 8^{15}$ și $3^{30} = \left(3^2\right)^{15} = 9^{15}$; f) $3^{100} = \left(3^2\right)^{50} = 9^{50}$ și $2^{150} = \left(2^3\right)^{50} = 8^{50}$. **81.** a) 6; b) 32; c) 1. **83.** a) 32; b) 1; c) 1; d) 1; e) 0; f) 0; g) 0. **84.** a) 1; b) 4; c) 0; d) 1. **86.** a) $x = 4$; b) $y = 66$; c) $z = 105$. **88.** a) 3; b) 1; c) 125; d) 70; e) 1. **89.** a) 2^{1995}; b) 3^{1997}; c) 6^{1995}. **92.** 31 zerouri. **93.** 5. **94.** a) $5a$; b) a^2; c) $5a^2$. **95.** a) a^{82}; b) b^7; c) a^{13}; d) $1 + a + a^2$; e) $1 + b + b^2$; f) b. **99.** $2^{1996} = \left(2^{1995} - 1\right) + \left(2^{1995} + 1\right)$. **100.** $3^{1996} =$

$= \left(3^{1995}-1\right)+3^{1995}+\left(3^{1995}+1\right)$. **102.** 1. **103.** 7. **104.** 1. **105.** Dacă $n=0$, numărul este $a=$ $=126$, dacă $n=1$ atunci $a=135$, dacă $n=2$, $a=225$, iar pentru $n\geq 3$ se obțin ultimele trei cifre 125. **107.** $11^7<4^{14}<5^{12}<7^{11}$. **108.** $a+1=2^{1996}$. **113.** $34=3^2+5^2$, $65=4^2+7^2$, $130=7^2+$ $+9^2$, $346=11^2+15^2$, $1105=12^2+31^2$. **114.** $40=7^2-3^2$, $120=13^2-7^2$. **115.** $17=1^2+$ $+4^2=2^2+2^2+3^2$; $29=2^2+5^2=2^2+3^2+4^2$; $41=4^2+5^2=1^2+2^2+6^2$. **117.** $n=40$. **120.** $2^n\cdot 6^n\cdot 3^m=2^n\cdot 2^n\cdot 3^n\cdot 3^m=2^{2n}\cdot 3^{m+n}$ este pătrat perfect dacă $m+n$ este număr par, deci m impar. **121.** 11. **122.** a) 799, 889, 898, 979, 988, 997; b) 7999, 8899, 8989, 9799, 9889, 9898, 9979, 9988, 9997. **123.** 666, 2664. **124.** $a=4$, $b=6$. **125.** a) $10\cdot\overline{abc}-\overline{bca}=1000a+100b+10c-$ $-100b-10c-a=999a=27\cdot 37\cdot a$, iar $10\overline{bca}-\overline{cab}=1000b+100c+10a-100c-$ $-10a-b=999b$; b) Se procedează asemănător ca la punctul a). **126.** 0. **129.** $n=3$. **130.** 2, 4, 4. **131.** $1+2+3+4+5=15$; $1+2+3+4+6=16$. Pentru 14 nasturi nu există soluție. **132.** 110. **133.** 16, 28, 9. **134.** 28.

CAP. II. ◆ MULȚIMI ◆

1. a) A; b) F; c) A; d) F; e) F; f) F; g) F; h) A. **2.** $\{M, A, T, E, I, \check{A}, C\}$. **3.** $D=\{x\,|\,x=2k, k\in\mathbf{N}, k\leq 3\}$; $E=\{x|x=3k+2;\ k\in\mathbf{N},\ k\leq 4\}$; $F=\{x\,|x=2k+1,\ k\in\mathbf{N}\}$; $G=\{x|x\in\mathbf{N}, x\leq 4\}$; $H=\{x\,|\,x\in\mathbf{N}$ și $3\leq x\leq 7\}$. **4.** $x\in\{3;4;5;6;7\}$. **5.** $x=7$ și $y=13$. **6.** $D=\{1;2;4;8\}$; $a=$ $=8$. **7.** $A=\{0;1;2;3\}$; $B=\{1;2;3;4;5;6\}$; $C=\{3;4;5;6;7\}$; $D=\{3;4;5;6;7\}$; $E=\{5;6;7;8\}$; $F=\{5;6;7;8\}$; $G=\{1;3;5;7\}$; $H=\{8;10;12;14;16;18;20\}$; $M=$ $=\{0;2;4;6;8\}$; $N=\{1;3;5;7\}$. **8.** $A\cap B\cap C=\{x\in\mathbf{N}\,|\,1<x\leq 4\}$; $A\cup B\cup C=$ $=\{x\in\mathbf{N}|x\leq 5\}$. **9.** $A=\{0;4;8;12;16;20;24\}$; $B=\{1;13\}$. **10.** a) $\{a;b;c;d\}$; b) $\{a;b;c;d;e\}$; c) $\{b;c;d;e\}$; d) $\{a;b;c;d;e\}$; e) $\{b\}$; f) $\{d\}$; g) $\{c\}$; h) $\varnothing$; i) $\{c;d\}$; j) $\{b;d\}$; k) $\{a;d\}$; l) $\{c\}$; m) $\{b\}$; n) $\{a;b\}$; q) A; p) $\{(a;b);(a;c);(b;b);(b;c);(d;b);(d;c)\}$; r) $\{(b;c);(b;d);(b;e);(c;c);(c;d);(c;e)\}$; s) $\{(a;b);(a;c);(b;b);(b;c);(d;b);(d;c);$ $(b;d);(b;e);(c;c);(c;d);(c;e)\}$. **11.** a) $D=\{0;1;2;3;4\}$; $E=\{3;4;5;6\}$; $F=$ $=\{1;2;3\}$; b) $D\cup E=\{0;1;\ldots;6\}$; $D\cup F=D$; $E\cup F=\{1;2;\ldots 6\}$; $D\cup E\cup F=$ $=\{0;1;\ldots;6\}$; $D\cap E=\{3;4\}$; $D\cap F=F$; $E\cap F=\{3\}$; $D\cap E\cap F=\{3\}$; $D-E=\{0;1;2\}$; $D-F=\{0;4\}$; $F-E=\{1;2\}$; $(D\cup E)\cap F=F$; $(D\cap F)-(D\cap E)=\{1;2\}$; $E-E=\varnothing$; $(F-D)\cup(F\cap D)=\{1;2;3\}$; $D\cup\varnothing=D$; $E\cap\varnothing=\varnothing$; $\varnothing-F=\varnothing$; $D-\varnothing=D$. **12.** $A=$ $=\{3;4;5;6;7;8;9\}$; $B=\{2;3\}$. **13.** $A=\{1;2;3;4;6\}$; $B=\{1;2;4;8\}$; $C=\{1;2;3;6\}$. **14.** $B=\{3;9\}$; $C=\{0;6\}$. **15.** $x=7$; $y=5$. **16.** $A=\{1;2;4\}$; $B=\{1;4;16\}$; $C=$ $=\{1;2;4;8;16\}$. **17.** $A=\{1;2;3;4;5;6\}$; $B=\{1;2;3;6\}$; $C=\{4;5\}$. **18.** $M\subset P$. **19.** $B=\{9;12;15;23;26\}$; $C=\{6;9;12;20;23\}$. **20.** $A=\{8\}$; $B=\{8\}$; $C=\{2;8\}$. **21.** $A=\{4;16\}$; $B=\{2;4\}$; $C=\{3;15\}$. **22.** $A=\{2;3;4;5\}$; $B=\{0;1;2;3;4\}$; $C=$ $=\{3;4;5;\ldots\}$; $A\cap B\cap C=\{3;4\}$. **23.** $x=1$; $y=2$. **24.** $n=11$; $m=20$. **25.** Submulțimile mulțimii $\{1\}$ sunt $\varnothing$ și $\{1\}$. Submulțimile mulțimii $\{1,2\}$ sunt $\varnothing$; $\{1\}$; $\{2\}$; $\{1;2\}$. O mulțime cu n elemente are 2^n submulțimi. **27.** $\{3\}$; $\{2;3\}$; $\{3;4\}$; $\{3;5\}$; $\{2;3;4\}$; $\{2;3;5\}$; $\{3;4;5\}$; $\{2;3;4;5\}$. **28.** $A=\{1;4;8\}$; $B=\{1;16;64\}$; $C=\{1;4\}$. **29.** Elementele mulțimii A sunt numere naturale care au ultima cifră 2; 3; 7 sau 8 și deci nu sunt pătrate perfecte. Deci $A\cap B=\varnothing$. **30.** Dacă $n\geq 5$, $1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n+2$ are ultima cifră 2 și deci nu poate fi pătrat perfect. $A=\{2\}$. **31.** $B=\{0;1;2;3;4;5\}$. **32.** $A=\{5;8;11;17\}$; $B=\{5;6;9;15;17\}$. **33.** $A=\{1;2;3;5\}$; $B=\{1;2;4\}$; $C=\{4;6\}$. **34.** $A=\{1;2;3;4;5\}$; $B=\{0;2;4\}$. **35.** $A=\{3\}$, $B=\{4\}$

Scanned with OKEN Scanner

sau $A=\{3;4\}; B=\{4\}$. **36.** $X=\{3;5\}$ sau $X=\{3;5;6\}$. **37.** $X=\{2;3;4\}; Y=\{1;4\}$. **38.** 4. **39.** $X=\{2;5;7\}$. **40.** $X=\{1;2;3;4;5\}; Y=\{3;4;5;6\}$. **41.** $A\subset B$. **42.** 1) $A=\{1;2;5\}; B=\{1;3;4;5\}; C=\{2;4;5\}$; 2) $A=\{2;5\}; B=\{1;3;4;5\}; C=\{2;4;5\}$; 3) $A=\{1;2;5\}; B=\{3;4;5\}; C=\{2;4;5\}$. **43.** 1) $X=\{0;1;2;3;4;8\}; Y=\{2;3;4;5;6;7\}$; 2) $X=\{0;1;2;3;4;5;6;8\}; Y=\{2;3;4;7\}$; 3) $X=\{0;1;2;3;4;5;8\}; Y=\{2;3;4;6;7\}$; 4) $X=\{0;1;2;3;4;6;8\}; Y=\{2;3;4;5;7\}$. **44.** $A=\{1;3\}; B=\{2;4\}$. **45.** $A=\{11;17;19\}; B=\{11;19\}$. **46.** $X=\{a;c;e\}; Y=\{b;c;d\}$. **47.** $E=\{1;2;3;4;5\}$. **48.** $A=\{1\}; B=\{2;3;4\}$. **49.** 5 elemente fiecare mulțime sau una are 4 elemente și cealaltă are 6 elemente. **50.** A are 8 elemente și B are 7 elemente. **51.** A are $2^{1996}+1$ elemente și B are $2^{1997}-2^{1996}+1$ elemente. Deci mulțimile au același număr de elemente.

CAP. III. ◆ DIVIZIBILITATE ◆

1. $x\in\{0,2,4,6,8\}$; b) $x\in\{0,2,4,6,8\}$; c) $x\in\{0,1,2,3,\ldots,9\}$; d) $x\in\{1,2,3,\ldots,9\}$; e) $x\in\{0,2,4,6,8\}$; f) $x\in\{2,4,6,8\}$; g) $x\in\{1,2,3,\ldots,9\}$; h) $x\in\{2,4,6,8\}$; i) $x\in\{0,2,4,6,8\}$. **2.** 798, 978. **3.** 340, 430, 304. **4.** a) $u\left(17^{1993}\right)=u\left(17^{1}\right)=7\Rightarrow\Rightarrow u\left(17^{1993}+1\right)=8$; 1991^{1993} – impar și 1991^{1994} – impar $\Rightarrow\left(1991^{1993}+1991^{1994}\right)$ este par. **5.** $a=(1+100)\cdot 50\Rightarrow a\vdots 2$. **6.** $S=k+(k+1)=2k+1\Rightarrow S\not\vdots 2$. **7.** $S=k+(k+1)+(k+2)=3k+3=3(k+1)$; deci $S\vdots 2\Leftrightarrow k$ – impar. **8.** $S=k+(k+1)+(k+2)+(k+3)=4k+6=2(2k+3)\Rightarrow S\vdots 2$. **9.** Adunând două câte două numerele respective se obțin numai numere pare. **10.** $S=[n(n+1)]:2$; $S\vdots 2\Leftrightarrow n=4k$ sau $n=4k+3$. **11.** $n=2k\Rightarrow 5n+4=10k+4=2(5k+2)\vdots 2$; $n=2k+1\Rightarrow 3n+1=6k+4=2(3k+2)\vdots 2$. **12.** a) impar; b) par; c impar; d) par; e) $n(n+1)+1$ – impar. **13.** a) 2523; 2553; 2583; b) 471; 474; 477; c) 2322; 2355; 2388; d) 111; 222; 333, ..., 999; e) 3333; 6666; 9999; f) 102030; 112131; 122232; 132333; 142434; 152535; 162636; 172737; 182838; 192939. **14.** 30; 60; 90. **15.** 2310; 2340; 2370; 2322; 2352; 2382; 2304; 2334; 2364; 2394; 2316; 2346; 2376; 2328; 2358; 2388. **16.** $A=\{0,3,6,12,15,18,21,24\}$. **17.** $b=a+1, c=a+2\Rightarrow a+b+c=3(a+1)\Rightarrow(a+b+c)\vdots 3\Rightarrow\overline{abc}\vdots 3$. **18.** $4^n\left(4^2+4+1\right)=4^n\cdot 21$. **19.** $5^{2n}(5+2-1)=5^{2n}\cdot 6$. **20.** $2^n\cdot 5^n+2=10^n+2$. $n=0\Rightarrow 10^0+2=3\vdots 3, n=1\Rightarrow\Rightarrow 10^1+2=12\vdots 3; n>1\Rightarrow 10^n+2=\underbrace{100\ldots02}_{n-1\text{ zerouri}}\vdots 3$. **22.** $S=k+(k+1)+(k+2)=3k+3=3(k+1)\Rightarrow S\vdots 3$. **23.** $P=n(n+1)(n+2)$; 1) $n=3k\Rightarrow n\vdots 3\Rightarrow P\vdots 3$; 2) $n=3k+1\Rightarrow n+2=3k+3\Rightarrow(n+2)\vdots 3$, 3) $n=3k+2\Rightarrow n+1=3k+3\Rightarrow(n+1)\vdots 3\Rightarrow P\vdots 3$ **24.** Se analizează cazurile: $n=3k; n=3k+1; n=3k+2$. **26.** $(x+2y)+(2x+y)=3x+3y\Rightarrow\Rightarrow(x+2y)+(2x+y)\vdots 3$; deci $(x+2y)\vdots 3\Leftrightarrow(2x+y)\vdots 3$. **27.** $5(n+4m)+2(6n+7m)=17n+34m=17(n+2m)\Rightarrow[5(n+4m)+2(6n+7m)]\ 17$; deci $(n+4m)\vdots 17\Leftrightarrow(6n+7m)\vdots 7$. **28.** a) $b\in\{0,2,4,6,8\}, a\in\{0,1,2,\ldots,9\}$. Deci sunt 50 de numere divizibile cu 2. b) $a+b\in\{1;4;7\}$; deci 15 numere sunt divizibile cu 3. **29.** $5(1+5)+5^3(1+5)+\ldots+5^{99}(1+5)=6\left(5+5^3+\ldots 5^{99}\right)$. **30.** $1+7+7^2=57$. Pentru ca a să fie divizibil cu 3 trebuie ca numărul termenilor să fie divizibil cu 3. Deci $n=3k$, $k\in\mathbf{N}^*$. **31.** a) 312, 332, 352, 372, 392; b) 1540, 1544, 1548; c) 1324, 2324, ..., 9324; d) 4564, 8568;

Scanned with OKEN Scanner

c) 12300, 12344, 12388; f) 444, 888; g) nu există. **32.** a) 2340, 2304, 2352, 2316, 2376, 2328; b) 5160, 5460, 5760, 5064, 5364, 5664, 5964, 5268, 5568, 5868; c) 8328; d) 5244; e) 25812, 55812, 35812, 65832, 95832, 15852, 45852, 75852, 25872, 55872, 85872. **33.** $3^{2n}\cdot 3^2 - 9^n = 9^n(9-1) = 9^n\cdot 8$. **34.** $3^n\left(3^3+3^2+3+1\right) = 3^n\cdot 40$. **35.** $P = n(n+1)(n+2)(n+3)$. Se studiază pe rând cazurile: $n=4k$, $n=4k+1$, $n=4k+2$, $n=4k+3$. **36.** 1) $n=4k \Rightarrow n\vdots 4$; 2) $n=4k+1 \Rightarrow n+3=4k+4 \Rightarrow n+3\vdots 4$; 3) $n=4k+2 \Rightarrow 3n+2=12k+8 \Rightarrow 3n+2\vdots 4$; 4) $n=4k+3 \Rightarrow 5n+1=20k+16 \Rightarrow 5n+1\vdots 4$. **37.** $a = 3(1+3)+3^3(1+3)+\ldots+3^{1993}(1+3) = 4(3+3^3+\ldots+3^{1993}) \Rightarrow a\vdots 4$ **39.** $2n(n+1)\vdots 4$ deoarece $n(n+1)\vdots 2$. **40.** $a=\frac{n(n+1)}{2}$; $a\vdots 4 \Leftrightarrow n\in\{8k, 8k+7 \mid k\in\mathbb{N}\}$. **41.** a) 730, 735; b) 5075, 5175, ..., 5975; c) 5235; d) 100, 200, ..., 900, 155, 255, ..., 955; e) nu există; f) 400, 410, ..., 490. **42.** a) $u\left(3^{14}\right) = u\left(3^2\right) = 9 \Rightarrow u\left(3^{14}+1\right) = 0 \Rightarrow 3^{14}+1\vdots 5$; b), c) analog cu a). **43.** $S = 5050$. **45.** $P = n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)$. Se analizează cazurile: $n=5k$, $n=5k+1$, $n=5k+2$, $n=5k+3$, $n=5k+4$. **47.** $a = 2(1+2+2^2+2^3)+2^5\left(1+2+2^2+2^3\right) = 2\cdot 15 + 2^5\cdot 15$ **48.** a) 400, 420, 460, 480; b) 1300; c) 2320; d) 1540; 2540, ..., 9540. **49.** $A=\{0, 5, 10, 15, 20, 25\}$. **50.** $20\cdot 5, 21\cdot 5, \ldots, 199\cdot 5$; sunt 180 de numere. **51.** a) 270, 279; b) 5392; c) 4500; d) 9999; e) 3555; f) 37233, 97299. **52.** $100^{13}+8 = 10^{26}+8 = 100\ldots 08$; suma cifrelor este 9. **53.** $10^n - 1 = 0$ dacă $n=0$; $10^n - 1 = 99\ldots 9$ dacă $n\in\mathbb{N}^*$. **54.** $7^{51}\left(7^2+5\right) = 7^{51}\cdot 54$. **55.** $a = 2^{100}\left(2^2+2+3\right) = 2^{100}\cdot 9$. **56.** $a = 2\left(1+2+2^2\right)+2^4\left(1+2+2^2\right)+\ldots+2^{100}\left(1+2+2^2\right) = 7(2+2^4+\ldots+2^{100})$. **57.** $n=0 \Rightarrow 10^n+26 = 27$; $n=1 \Rightarrow 10^n+26 = 36$; $n\geq 2 \Rightarrow 10^n+26 = 100\ldots 026$ este divizibil cu 9 deoarece suma cifrelor este 9. **58.** a) 126; b) 23400; c) 3510, 3582, 3564, 3546, 3528; d) 4770, 4572, 4374, 4176, 4278; e) 9972, 8874, 7776. **59.** a) 4500; b) 2340, 2304, 2376; c) 4752; 9756; d) 99360, 77364, 55368; e) 4752, 4356. **60.** a) 630; b) 7560, 7515; c) 1800; d) 6750, 1755; e) 24300, 23355. **61.** a) 750; b) 2700; c) 825, 875; d) 7300, 7350; e) 102500. **62.** $3^{1993}\left(3^2+4^2\right) = 3^{1993}\cdot 25$. **63.** 2305, 2315, 2335, 2345, 2355, 2365, 2385, 2395. **64.** 36. **65.** $4^n\left(4^2+4+5\right) = 4^n\cdot 25$. **66.** $\overline{45x} = 450+x = 27\cdot 17 - 9 + x \Rightarrow x = 9$. **67.** $\overline{32x7} = 3207+10x = 168\cdot 19 + 15 + 10x \Rightarrow x = 8$. **68.** $n = 100a+10b+c+100b+10c+a+100c+10a+b = 111(a+b+c)$. **69.** $M = \overline{ab}\cdot 10^3 + 303 + 27\cdot 10^2 + \overline{ab} = 1001\,\overline{ab} + 3003 = 1001\left(\overline{ab}+3\right)$. **70.** $2A+B =$; $= 17(a+b+c)$ deci $A\vdots 17 \Leftrightarrow B\vdots 17$. **71.** $a\cdot b = 2^{20}\cdot 5^6\cdot 3^{16}\cdot 11^{15} = 10^6\cdot 2^{14}\cdot 3^{16}\cdot 11^{15}$. **72.** $d\mid n+7$ și $d\mid n+3 \Rightarrow d\mid (n+7)-(n+3) \Rightarrow d\mid 4 \Rightarrow d\in\{1, 2, 4\}$. **74.** $d\mid 2n+3$ $d\mid 3n+2 \Rightarrow d\mid 3(2n+3)-2(3n+2) \Rightarrow d\mid 5 \Rightarrow d\in\{1, 5\}$. **75.** 2; 135. **76.** 1) $a=29, b=97$; 2) $a=97, b=29$. **77.** $a=2, b=3$. **78.** $a=2, b=5, c=7$. **80.** $b=2, a=2, c=2, d=2$. **81** $n=2 \Rightarrow n+1=3, n+3=5, n+5=7$. Orice număr mai mare ca 2 are una din formulele: $3k$, $3k+1$, $3k+2$; $n=3k \Rightarrow (n+3)\vdots 3$; $n=3k+1 \Rightarrow (n+5)\vdots 3$; $n=3k+2 \Rightarrow \ldots \Rightarrow (n+1)\vdots 3$. Deci $n=2$ este singurul număr care satisface cerințele. **82.** $n=5$. **83.** $n=3$. **86.** $d\mid 2n+3, d\mid 3n+4 \Rightarrow d\mid 3(2n+3)-2(3n+4) \Rightarrow d\mid 1 \Rightarrow d=1$. **87.** $\overline{ab} = 11$. **88.** Avem două cazuri: 1) Când între 51 și 71 sunt primele 4 elemente ale mulțimii A, avem: $A=\{64, 66, 68, 70, 72, 74, 78, 80, 82\}$. 2) Când între 51 și 71 sunt ultimele 4 elemente ale mulți-

Scanned with OKEN Scanner

mii A, avem: $A = \{58, 56, 54, 52, 50, 48, 46, 44, 42, 40, 38, 36\}$. **89.** $\overline{abcabc} = \overline{abc} \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$. Numărul divizorilor se obține prin adunarea exponenților cu 1 și înmulțind rezultatele obținute. Deci numărul are 16 divizori. **90.** $\overline{ab} = 31$, $\overline{cda} = 263$. **91.** a) 4230, 8235; b) 33570, 55575; c) 78300, 78255. **92.** a) 12204, 14724, 12744, 12564; b) 2232, 2736; c) 5400, 5544, 5688. **93.** a) 450; b) 2340, 2322, 2304, 2394, 2376, 2358; c) 94500, 54522, 14544, 64566, 24588. **94.** a) 2520, 2340, 2160, 2880; b) 30420, 39420, 37440, 35460, 33480; c) 1080. **95.** $x = 1$. **97.** a) 600; 198000; b) 5733; 2046681; c) 1513512; 4195455264; d) 7007; 1774543771; e) 152; 6365152. **99.** Numărul cerut este c.m.m.d.c. al numerelor respective: a) 90; b) 21; c) 1309. **99.** Numărul cerut este c.m.m.m.c. al numerelor respective: a) 720; b) 2079; c) 23868. **100.** Fie x numărul cerut: $(x-5) \vdots 24, (x-5) \vdots 40, (x-5) \vdots 58 \Rightarrow x-5$ este c.m.m.m.c. al numerelor 24, 40 și $58 \Rightarrow x-5 = 3480 \Rightarrow x = 3485$ **101.** 733. **102.** Fie x numărul cerut. Se observă că $x+10$ este divizibil cu numerele: 24, 36, 54 rezultă $x+10$ este c.m.m m.c. al acestor numere, rezultă $x+10 = 216$, rezultă $x = 206$.

CAP. IV. • NUMERE RAȚIONALE POZITIVE •

1. $\frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{4}{5}, \frac{6}{7}, \frac{5}{7}, \frac{7}{8}, \frac{10}{9}, \frac{9}{10}, \frac{8}{16}$. **2.** $\frac{0}{9}, \frac{2}{9}, \frac{4}{9}, \frac{6}{9}, \frac{8}{9}, \frac{10}{9}$. **3.** a) 16; b) 20. **4.** a) $\frac{2}{13}, \frac{2}{15}, \frac{2}{17}, \frac{2}{19}, \frac{2}{31}, \frac{2}{35}, \frac{2}{37}, \frac{2}{39}$ etc; b) $\frac{11}{5}, \frac{22}{5}, \frac{33}{5}, \frac{44}{5}$ etc. **5.** $\frac{2}{10}, \frac{3}{10}, \frac{5}{10}, \frac{7}{10}, \frac{11}{10}, \frac{13}{10}, \frac{17}{10}, \frac{19}{10}$ etc. **6.** $\frac{90}{99}, \frac{91}{99}, \frac{92}{99}, \frac{93}{99}, \frac{94}{99}, \frac{95}{99}, \frac{96}{99}, \frac{97}{99}, \frac{98}{99}$. **7.** $\frac{98}{90}, \frac{98}{91}, \frac{98}{92}, \frac{98}{93}, \frac{98}{94}, \frac{98}{95}, \frac{98}{96}, \frac{98}{97}$. **8.** $\frac{2}{12}, \frac{5}{12}, \frac{8}{12}, \frac{11}{12}$. **9.** $\frac{9}{1}, \frac{9}{3}, \frac{9}{5}, \frac{9}{7}$. **10.** $\frac{2}{12}, \frac{5}{13}, \frac{8}{14}, \frac{11}{15}, \frac{14}{16}$. **11.** $\frac{9}{1}, \frac{10}{3}, \frac{11}{5}, \frac{12}{7}, \frac{13}{9}, \frac{14}{11}, \frac{15}{13}, \frac{16}{15}$. **12.** 30. **13.** 6. **15.** $\frac{24}{36}, \frac{22}{33}, \frac{20}{30}, \frac{18}{27}, \frac{16}{24}, \frac{14}{21}, \frac{12}{18}, \frac{10}{15}, \frac{8}{12}, \frac{6}{9}, \frac{4}{6}, \frac{2}{3}$. **16.** $\frac{12}{30}, \frac{14}{35}, \frac{16}{40}, \frac{18}{45}, \frac{20}{50}$. **17.** $\frac{80}{100}, \frac{84}{105}, \frac{88}{110}, \frac{92}{115}, \frac{96}{120}$. **19.** $\frac{25}{100}, \frac{2}{10}, \frac{5}{100}, \frac{3125}{100000}, \frac{25}{1000}$ etc. **20.** $\frac{10}{30}, \frac{10}{15}, \frac{1000}{375}, \frac{10000}{1875}, \frac{100}{12}$ etc. **23.** a) $\frac{3}{2}$; b) $\frac{4}{5}$; c) $\frac{25}{26}$. **24.** a) $\frac{a}{\overline{a0}} = \frac{a}{10a} = \frac{1}{10}$; b) $\frac{\overline{a0}}{\overline{aa0}} = \frac{10a}{110a} = \frac{1}{11}$; c) $\frac{\overline{a0a}}{\overline{aa0}} = \frac{101a}{1010a} = \frac{1}{10}$; d) $\frac{\overline{aa}}{\overline{aaaa}} = \frac{11a}{1111a} = \frac{1}{101}$. **25.** $\frac{312}{330}, \frac{312}{336}, \frac{612}{630}, \frac{612}{636}, \frac{912}{930}, \frac{912}{936}$. **26.** $\frac{270}{1125}, \frac{270}{6120}, \frac{675}{1125}, \frac{675}{6120}$. **27.** $\frac{2}{5}$. **29.** Fie $d = (7n+5, 4n+3)$ atunci $d \mid 7n+5$ și $d \mid 4n+3 \Rightarrow d \mid 7(4n+3) - 4(7n+5) \Rightarrow d \mid 1$. A doua fracție este reductibilă deoarece pentru $n = 2$ se simplifică cu 5. **30.** a) $\frac{19}{20} > \frac{18}{19}$; b) $\frac{11}{13} < \frac{13}{15}$ etc. **31.** a) $2 < \frac{11}{5} < \frac{12}{5} < \frac{13}{5} < \frac{14}{5} < 3$; b) $\frac{2}{13} < \frac{2}{11} < \frac{2}{9} < \frac{2}{7} < \frac{2}{5} < \frac{2}{3}$; c) $\frac{25}{27} < \frac{27}{29} < \frac{29}{31} < \frac{21}{22} < \frac{22}{23} < \frac{23}{24}$. **33.** a) Dacă $m = n$ numerele sunt egale, dacă $m < n$ atunci $\frac{m}{n} < \frac{m+1}{n+1}$, iar dacă $m > n$ avem $\frac{m}{n} > \frac{m+1}{n+1}$; b) Se folosește punctul a). **34.** $n \in \{0, 1, 2, 3\}$. **35.** $n \in \{2, 3\}$. **36.** $m = 27, n = 4, p = 10$. **37.** $\frac{10}{999}$. **39.** $\frac{49}{50}$. **40.** a) 50; b) $\frac{51}{101}$. **44.** a) $\frac{1}{102} + \frac{1}{203} + \ldots + \frac{1}{19 \cdot 20} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{19} - \frac{1}{20} = 1 - \frac{1}{20} = \frac{19}{20}$; b) $\frac{2}{1 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{1}{1} - \frac{2}{2} + \frac{1}{3} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2}$ (conform exercițiului 43 b); $\frac{2}{2 \cdot 3 \cdot 4} = \frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{3}$ etc. **47.** $\frac{1}{12}$. **49.** 0. **51.** $\frac{3}{4} + \frac{3}{4} + \frac{3}{4} = \frac{9}{4}$. **56.** $\frac{1995}{2}$. **58.** 2000. **59.** Fie $\overline{abc}$ astfel încât $2b = a + c$. Avem $\overline{abc} + c = 100a + 10b + 2c = 100a + 5a + 5c + 2c = 105a + 7c = 7(15a + c)$. **60.** 1 zi. **61.** 25, 15. **62.** 36 zile, 27 zile. **63.** 8,17. **64.** 1000, 2000, 3000, 4000 lei. **65.** 420. **66.** 800 lei, 1200 lei. **67.** 63,28. **68.** a) 21,90; b) 111,900.

*
* *

clasa a VI-a

CAP. I. • RAPOARTE • PROPORȚII • PROCENTE •

1. 1 caiet costă 800 lei, 1 carte costă 2000 lei. **2.** $\frac{P_1}{P_2}=\frac{7}{9}$ și $\frac{A_1}{A_2}=\frac{49}{81}$. **5.** $\frac{8}{9}$. **6.** $\frac{a}{b}=\frac{2}{3}\Rightarrow A=$ $=\frac{3}{11}$. **7.** $A=\frac{43}{85}$. **8.** $\frac{x}{y}=\frac{9}{10}$. **9.** $\frac{3a+b}{3a-b}=-19$. **10.** $\frac{4x-y}{2x+3y}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow 6x=5y\Leftrightarrow\frac{x}{y}=\frac{5}{6}$. **11.** $1,5x=yz\Rightarrow 1,5x\in\mathbb{N}$. Deoarece x este număr prim obținem: $x=2$; deci $yz=3\Rightarrow y=1,\ z=3$ sau $y=3$ și $z=1$. **12.** a) $x=21$; b) $x=2$; c) $x=7$; d) $x=4$; e) $x=4$; f) $x\in\varnothing$; g) $x=16,5$; h) $x=1$; i) $x=$ $=1$; j) $x=21$. **13.** $x=100\frac{2}{7}$. **14.** $x=0$. **15.** $x=\frac{50}{39}$. **16.** $\frac{x+1}{x}=91\Rightarrow x=\frac{1}{90}$. **17.** $x=1701$. **18.** $\frac{59}{236}=\frac{67}{268}$, $\frac{118}{177}=\frac{134}{201}$, $\frac{177}{118}=\frac{201}{134}$, $\frac{236}{59}=\frac{268}{67}$. **19.** $\frac{a}{b}\in\left\{2,\frac{20}{7},\frac{26}{7},\frac{104}{7}\right\}$. **20.** $\frac{2a}{3}=\frac{3b}{5}=$ $=\frac{5c}{4}=k$. Obținem $a=45$, $b=50$, $c=24$. **21.** $\frac{x}{x+my}=\frac{y}{y+mz}=\frac{z}{z+mx}\Rightarrow\frac{x}{my}=$ $=\frac{y}{mz}=\frac{z}{mx}\,|\cdot m\Rightarrow\frac{x}{y}=\frac{y}{z}=\frac{z}{x}=\frac{x+y+z}{x+y+z}=1\Rightarrow x=y=z$. Reciproca este evidentă. **22.** Se arată că $E=4$. **23.** $\frac{a}{2}=\frac{b}{3}=\frac{c}{5}=k\Rightarrow k=3\Rightarrow a=6,\ b=9,\ c=15$ **24.** $\frac{a-y}{x}=\frac{a-z}{y}=\frac{a-x}{z}=k$. Se obține: $x=y=z=\frac{a}{k+1}$. **25.** a) $\frac{a}{b}=\frac{2}{3}\Leftrightarrow\frac{a}{2}=\frac{b}{3}\Rightarrow\frac{a}{2x}=\frac{c}{8}\Rightarrow\frac{a}{x}=\frac{c}{4}$, $a<c\Rightarrow\ x<4$; cum x este prim, avem: $x\in\{2,3\}$; b) Pentru $x=2$ avem: $\frac{a}{2}=\frac{b}{3}=\frac{c}{4}=k$. Deci $\frac{abc}{ab+bc+ca}<\frac{12}{13}$; atunci $0<k<1\Rightarrow a<2,\ b<3,\ c<4\Rightarrow a=1\in\mathbb{N},\ k=\frac{1}{2}$, iar $b=\frac{3}{2}\notin\mathbb{N},\ c=2\in\mathbb{N}$. **26.** $\frac{x}{y}=\frac{z}{t}\Rightarrow\frac{x+z}{x-z}=\frac{y+t}{y-t}\Rightarrow\frac{x+y+z+t}{x+y-z-t}=\frac{x-y+z-t}{x-y-z+t}$, apoi aplicând proprietatea fundamentală a proporțiilor se obține relația cerută. **27.** $\frac{ma+nb}{mc+nd}=\frac{ma}{mc}\Rightarrow\frac{ma+nb}{mc+nd}=\frac{nb}{nd}\Rightarrow\frac{ma}{mc}=$ $=\frac{nb}{nd}\Rightarrow\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$. **28.** " $\Rightarrow$ " $a=b=c$ și înlocuind pe b și c cu a obținem: $\frac{3a+a}{3a-a}=\frac{3a+a}{3a-a}=$ $=\frac{3a+a}{3a-a}$. " $\Leftarrow$ " $\frac{3a+b}{3a-b}=\frac{3b+c}{3b-c}=\frac{3c+a}{3c-a}=\frac{4a+4b+4c}{2a+2b+2c}=2$; $\frac{3a+b}{3a-b}=2\Rightarrow$ $\Rightarrow 3b=3a\Rightarrow a=b$; analog $b=c$. **29.** $\frac{a}{2}=\frac{b}{3}=\frac{c}{4}=\frac{d}{5}\Rightarrow b=\frac{3a}{2}$, $c=2a$, $d=\frac{5a}{2}\Rightarrow abcd=$ $=\frac{15a^4}{2}\Rightarrow a^4=16\Rightarrow a=2,\ b=3,\ c=4,\ d=5$. **30.** 8. **31.** $x(x-1)\cdot(x+1)=a\Rightarrow\frac{a+3}{a+15}=$ $=\frac{a-2}{a-10}\Rightarrow a=0\Rightarrow x\in\{0,1\}$. **32.** $\frac{x}{2}=\frac{y}{3}=\frac{4}{z}=k\neq 0\Rightarrow x=2k,\ y=3k,\ z=\frac{4}{k}\in\mathbb{N}\Rightarrow k\in$ $\in\{1,2,4\}$; $(x,y,z)\in\{(2,3,4),(4,6,2),(8,12,1)\}$. **33.** $2x+3y=21$ și $5y+2z=39\Rightarrow$ $\Rightarrow 2x+2y+2z+6y=60\Rightarrow 30+6y=60\Rightarrow y=5$. Avem apoi $x=3$ și $z=7$. **34.** $b^3=8a$, $c^2=6a$, $2a^3=3b^2c^3\Rightarrow\left(2a^3\right)^6=\left(3b^2c^3\right)^6\Rightarrow 2^6\cdot a^{18}=3^6\left(b^3\right)^4\cdot\left(c^2\right)^9$. După înlocuire obținem: $a=216,\ b=12,\ c=36$. **35.** $2a+3b=14\Rightarrow(a,b)\in\{(1,4),(4,2),(7,0)\}$. **36.**

Scanned with OKEN Scanner

$\frac{x}{2}=\frac{5}{z}\Rightarrow xz=10\Rightarrow x\in\{1,2,5,10\}$; $\frac{x}{2}=\frac{y}{3}\Rightarrow y=\frac{3x}{2}\Rightarrow x\in\{2,10\}$; $x=2\Rightarrow y=3$, $z=5$ și $t=7$, iar dacă $x=10$ atunci: $y=15$, $z=1$, $t=35$. **37.** 8. **39.** $8x=10y=15z=24t\Rightarrow$ $y=\frac{4x}{5}$, $z=\frac{8x}{15}$, $t=\frac{x}{3}$; $x=15k$, $y=12k$, ; $z=8k$, $t=5k$, $k\in\mathbb{N}^*$ din condiția de minimalitate, $k=1$ și atunci $x=15$, $y=12$, $z=8$, $t=5$; $(x+y+z+t)n=8x\Rightarrow n=3$. **40.** $\frac{a_1+a_2}{a_1+na_2}=$ $=\frac{a_2+a_3}{a_2+na_3}=...=\frac{a_n+a_1}{a_n+na_1}=\frac{2(a_1+...+a_n)}{(n+1)(a_1+...+a_n)}=\frac{2}{n+1}\Rightarrow a_1=a_2=a_3=...=a_n$. **41.** $\frac{x}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z}{4}\Rightarrow x=10$, $y=15$, $z=10$. **43.** $\frac{a}{3}=\frac{b}{5}=\frac{c}{10}=\frac{72}{18}=4\Rightarrow a=12, b=20, c=40$. **44.** $2x=3y=8z\Rightarrow x=600, y=400, z=150$. **45.** $\frac{\overline{abc}}{38}=\frac{\overline{bca}}{47}=\frac{\overline{cab}}{26}=(a+b+c)\in\mathbb{N}\Rightarrow b$ și c sunt pare; numărul este 342. **46.** a) 6, 9, 12, 8, 6; b) $x=18, y=27, z=36, t=24, u=18$. **47.** a) $x=\frac{4}{3}$, $y=2$, $z=\frac{8}{3}$; b) $x=26, y=39, z=52$; c) $x=4, y=6, z=8$. **50.** $x=14, y=21, z=28$. **51.** $x=12, y=$ $=6, z=28$. **52.** $S=1990$. **53.** $x=3; y=4; z=6$. **55.** $\frac{\overline{ab}}{c}=\frac{\overline{bc}}{a}=\frac{\overline{ca}}{b}=k\Rightarrow 11(a+b+c)=$ $=k(a+b+c)\Rightarrow k=11\Rightarrow a=b=c$. **56.** $c\cdot\overline{ab}=a\cdot\overline{bc}=b\cdot\overline{ca}\Rightarrow \underset{>0}{\frac{a[9(c-b)-b]}{}}+\underset{>0}{\frac{bc}{}}=0$, imposibil pentru a, b, c, cifre și $a<b<c$. **57.** $5x=6y=7z=k\Rightarrow x=\frac{k}{5}$, $y=\frac{k}{6}$, $z=\frac{k}{7}\Rightarrow k=0$ sau $k=210$; $k=0\Rightarrow x=y=z=0$ și $k=210\Rightarrow x=42$, $y=35$, $z=30$. **58.** $a=5, b=3, c=2$. **59.** $\frac{9a+b}{51}=\frac{9b+c}{61}\Rightarrow S=20$. **60.** $\frac{a}{8}=\frac{b}{6}=\frac{c}{12}=k$; $\frac{a'}{3}=\frac{b'}{4}=\frac{c'}{2}=k'\Rightarrow 26k=9k'$ și $8k+4k'=880$, deci $k=45$, $k'=130$. **61.** $\frac{x}{3}=\frac{y}{4}=\frac{z}{6}=k$; $k=\frac{5}{12}$. **63.** $\frac{x}{2}=\frac{y}{3}=k$; $E=5\frac{1}{4}$. **64.** $5a=6b=10c=k\Rightarrow$ $a=\frac{k}{5}$, $b=\frac{k}{6}$, $c=\frac{k}{10}$, $k=25$. **67.** $x, y, x', y'\neq 0$; $\frac{x'}{y}=\frac{y'}{x}=k\Rightarrow$ $\Rightarrow x'=ky$ și $y'=kx$; $\frac{x'y'}{xy}=\frac{k^2(xy)}{xy}=k^2$, $\left(\frac{x'+y'}{x+y}\right)^2=k^2$. **68.** $\frac{x}{y}=\frac{z}{t}$; $x+y=295$ și $z+t=335$. $\frac{x}{x+y}=\frac{z}{z+t}\Rightarrow\frac{x}{t}=\frac{59}{67}\Rightarrow x=59k$, $z=67k$ și $k\in\{1,2,3,4\}$. Se obține: $\frac{59}{236}=\frac{67}{268}$; $\frac{118}{177}=\frac{134}{201}$; $\frac{177}{118}=\frac{201}{134}$ și $\frac{236}{59}=\frac{258}{67}$. **69.** $a=45, b=18, c=20$. **70.** 684. **71.** $\frac{x^2}{4}=\frac{y^2}{25}=\frac{z^2}{64}=\frac{t^2}{100}\Rightarrow\frac{x}{2}=\frac{y}{5}=\frac{z}{8}=\frac{t}{10}\Rightarrow x<y<z<t; 4x+4t=48\Rightarrow x+t=12\Rightarrow$ $\Rightarrow x=2, y=z=28, t=10$. **72.** 50 de costume. **73.** 4000 m^2 . **74.** 36 de zile. **75.** 2 ore și 24 de minute. **76.** 12 muncitori fac în 14 zile $\frac{4}{7}$ din lucrare și atunci 18 muncitori vor face în 7 zile $\frac{3}{7}$ din lucrare, deci vor mai veni 6 muncitori. **77.** 12 camioane de $5\frac{3}{4}t$. **78.** 6 zile. **79.** 6 zile. **80.** Utilizăm regula de trei compusă; 25 zile. **81.** A mers 125 km cu 50 km / h și 63 km cu 42 km / h. **82.** 0,750; 0,666; 0,875. **83.** $T_1=\frac{400}{400+100}=0,800$; $T_2=0,900$; $\frac{T_3-T_1}{T_2-T_3}=\frac{C_2}{C_1}=\frac{1}{3}$, deci trebuie luate 300 g și respectiv 100 g. **84.** $\frac{\text{cant. sare}}{\text{cant. soluție}}=\frac{P}{1000}$; $\frac{x}{200}=\frac{25}{1000}\Rightarrow x=5$; $\frac{5}{200+100}=\frac{P}{1000}\Rightarrow$ $\Rightarrow P=\frac{50}{3}$ și concentrația va fi $1,(6)‰$. **85.** $x=\frac{100\cdot 440}{10000}=4,4$. În general concentrația este:

Scanned with OKEN Scanner

$\frac{Aa+Bb+Cc}{A+B+C}$ (A, B, C cantități cu a, b, c concentrații). **86.** Din îngrășământul cu 60 lei / kg s-au luat 39,2 kg, iar din cel cu 35 lei / kg, 100,8 kg. **87.** 264 băieți. **88.** $a=125, b=100, c=75, d=45$. **90.** $a+b+c=87, a+150\%a=b-25\%b=c-5 \Rightarrow a=12, \quad b=40, c=35$. **94.** Dacă x este prețul după prima creștere avem $\frac{105}{100}\cdot x=3969 \Rightarrow x=3780$. Deci prima creștere este de 280 lei reprezentând 8 % din prețul inițial. **95.** 150 ha; 180 ha; 160 ha. **96.** $a=25\%b \Rightarrow b=4a \Rightarrow \frac{b}{a+b}=$ $=\frac{4}{5} \Rightarrow \frac{b}{a+b}=\frac{80}{100} \Rightarrow b=80\%(a+b)$. **97.** $6\frac{2}{3}$ ore. **98.** Partea I, 600; partea a II -a 735; partea a III - a, 1350; partea a IV - a, 825; partea a V - a, 1290. **99.** 40000 locuitori. **100.** În 2 tone cărbune intră $2t\cdot\frac{80}{100}=1,6t$ carbon. Cantitatea de turbă necesară obținerii a 1,6 tone carbon este $1,6:64\%=2,5\,t$.

CAP. II. ◆ NUMERE ÎNTREGI ◆

1. 10. **2.** $-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$. **8.** $S=-25$ sau $S=-20$ sau $S=-15$ sau $S=-10$ sau $S=-5$. **9.** a) $x=\pm2$; b) $x=0$; c) $x=\pm4$; d) $x\in\varnothing$; e) $x\in\varnothing$; f) $x\in\mathbf{Z}$. **10.** a) *f*; b) *a*; c) *a*; d) *f*; e) *f*; f) *f*; g) *a*; h) *a*. **13.** $-4, -3, -2, 2, 3, 4$. **14.** $-9, -8, -7, -6, -5, 5, 6, 7, 8, 9$. **15.** 21. **17.** a) 0; b) 2; c) 0; d) 1. **21.** numere sunt egale cu -20. **22.** $a-b+c-d=4$; $ab-ac+ad=-4$; $c-b-d=2$. **25.** $(-1)+(-3)+\ldots+(-99)=-100\cdot25=-2500$; $(-2)+(-4)+\ldots+(-98)=$ $=-98\cdot25=-2450$. **26.** $(-1)+(-3)+\ldots+(-1999)=-2000\cdot500=-1000^2$. **32.** a) 0; b) 1; c) 2. **33.** a) numerele întregi negative; b) numerele întregi pozitive; c) 0. **34.** a) $-11, -6, -3, -2, 0, 1, 4, 9$; b) $-11, -1, 9, 19$. **37.** a) numerele sunt egale; b) $(-3)^{22}=9^{11}>8^{11}=2^{33}$; c) $(-3)^{22}>$ $>0>(-2)^{33}$; d) $(-2)^{22}=4^{11}>3^{11}$; e) $(-2)^{555}=-32^{111}<-27^{111}=(-3)^{333}$. **39.** a) -2; b) 4; c) -8. **41.** a) 350; b) 0. **42.** 50. **43.** $-18, 0$. **44.** 0. **45.** $-3, -1, 1, 3$. **46.** 0. **47.** $(-12, 1)$; $(-6, 2)$; $(-4, 3)$; $(-3, 4)$; $(-2, 6)$; $(-1, 12)$ etc. **50.** $(37, -1)$; $(37, 1)$; $(10, -2)$; $(10, 2)$; $(5, -3)$; $(5, 3)$; $(2, -6)$; $(2, 6)$ etc. **51.** $(1, 0)$; $(-1, 0)$. **52.** a) $x=y=1$; b) $x=y=10$. **53.** $x=$ $=1, y=-1$. **54.** $(x-3)(y+3)=6$ etc. **55.** $x\in\{-1, 0, 1\}$; $y\in\{0, 1, 2\}$; $z\in\{1, 2, 3\}$. Sunt în total 27 triplete. **57.** Se consideră cazurile: $n=4k$, $n=4k+1$, $n=4k+2$, $n=4k+3$. **59.** $-3, -2, -1$ sau $1, 2, 3$ sau $-1, 0, 1$. **60.** Se adună membru cu membru cele trei inegalități. **62.** Din prima relație: $a=1, b=5$ sau $a=2, b=3$ sau $a=4, b=2$ sau $a=-1, b=-3$ sau $a=-2, b=-1$ sau $a=-4$ $b=0$, dar nici una dintre perechile anterioare nu verifică a doua relație. **63.** 3, 4, 5. **64.** $-5, -4, -3$ sau 3, 4, 5. **66.** $(n+2)\mid\left(n^2+2\right)$ și $(n+2)\mid n(n+2) \Rightarrow (n+2)\left(n^2+2n-n^2-2\right) \Rightarrow (n+2)\mid 2n-2$. Se obține $(n+2)\mid 6$ etc. **67.** $\frac{2x^2+3x+9}{2x+3}=3+\frac{9}{2x+3}\in\mathbf{Z} \Rightarrow 2x+3\mid 9$ etc. **69.** $n=-1$. **70.** $n=$ $=4k+1$; $k\in\mathbf{Z}$. **71.** Se consideră cazurile $n=5n$, $n=5n+1$, $n=5n+2$, $n=5n+3, n=5n+4$. **72.** Se consideră cazurile $a=3k$, $b=3n$; $a=3k+1$, $b=3n$ etc.

CAP. III. ◆ NUMERE RAȚIONALE ◆

1. $8, \frac{1}{4}, -\frac{1}{4}$. **2.** -11. **3.** $\pm\frac{2}{3}, \pm\frac{2}{2}; \pm\frac{2}{1}$. **4.** $\pm\frac{2}{3}; \pm\frac{1}{3}; 0$. **5.** $\frac{14}{15}, \frac{13}{15}, \frac{12}{15}, \frac{11}{15}, \frac{13}{14}, \frac{12}{14}, \frac{11}{14}$, $\frac{12}{13}, \frac{11}{13}, \frac{11}{12}$. **7.** $x=\frac{a+b}{2}; y=\frac{a-b}{2}$, $x, y\in\mathbf{Z}$ dacă a și b au aceiași paritate. **10.** p_1 este falsă, p_2 este adevărată. **11.** 0. **12.** a) $\frac{5}{4}$; b) $\frac{1}{5}$. **15.** a) -1; b) 1. **16.** a) 1; b) -1. **18.** $\frac{1}{51}$. **19.** $-\frac{3}{2}$. **20.** a)

Scanned with OKEN Scanner

$\left(\frac{1}{2}\right)^{51} > \left(\frac{1}{2}\right)^{52} = \left(\frac{1}{4}\right)^{26}$; b) $\left(\frac{3}{5}\right)^{73} < \left(\frac{4}{5}\right)^{73} \Rightarrow \left(-\frac{3}{5}\right)^{73} > \left(-\frac{4}{5}\right)^{73}$; c) $\left(-\frac{2}{3}\right)^{36} = \left(\frac{2}{3}\right)^{36} =$ $= \left(-\frac{8}{27}\right)^{12}$; d) $\left(-\frac{2}{3}\right)^{-2} = \left(-\frac{3}{2}\right)^{2} = \frac{9}{4}$ iar $\left(-\frac{3}{4}\right)^{-2} = \left(\frac{4}{3}\right)^{2} = \frac{16}{9}$ și $\frac{9}{4} > \frac{16}{9}$. **22.** a) 0; b) $-\frac{1}{3}$. **23.** a) 0; b) $\frac{4}{9}$; c) 1. **24.** a) $\frac{13}{2}$; b) $-\frac{1}{9}$ pentru n impar, $\frac{1}{3}$ pentru n par. **25.** $\frac{7}{12}$ pentru n par, $-\frac{7}{12}$ pentru n impar. **27.** a) 16; b) $\frac{1}{16}$; c) 15. **28.** $\frac{5}{4}$ pentru m, n impare. **29.** $-\frac{4}{5}$ pentru m par și n, p impare. **30.** n impar. **31.** 1 pentru m, n, p numere pare; 3 pentru m, n, p impare etc. **33.** da, în cazul $x < 0, y > 0, z < 0$. **34.** Orice număr întreg nenul. **35.** 6, $\frac{12}{5}$. **36.** $\frac{4}{9}$; $\frac{28}{9}$. **37.** $\frac{32}{3}$, $\frac{62}{3}$. **38.** $\frac{91}{81}$, $\frac{109}{36}$. **39.** 155, 93, 62. **40.** 98 tone. **43.** $\frac{43}{5}$. **46.** Numerele x, y, z sunt strict pozitive și $\frac{1}{x} = \frac{2}{9z}$, $\frac{1}{y} = \frac{3}{9z} \Rightarrow \frac{2}{9z} + \frac{3}{9z} + \frac{1}{z} > \frac{14}{37} \Rightarrow$ $\Rightarrow \frac{14}{9z} > \frac{14}{37} \Rightarrow 9z < 37 \Rightarrow z \in \{1, 2, 3, 4\}$ etc. **47.** 20, 20, 15. **48.** Ecuația este simetrică deci presupunem $x \le y \Rightarrow \frac{1}{x} \ge \frac{1}{y} \Rightarrow \frac{2}{x} \ge \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \Rightarrow \frac{2}{x} \ge \frac{1}{3} \Rightarrow x \le 6$ etc. **52.** Pentru $a = 0$ sau $a = 1$, numerele sunt egale. Dacă $0 < a < 1$ cel mai mare număr este a, iar dacă $a > 1$ cel mai mare număr este a^{10}. **53.** $n = 4$ sau $n = -4$. **55.** Se folosește faptul că $\frac{1}{n^2} < \frac{1}{n^2 - 1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}\right)$. **57.** a) $n = 5k +$ $+1$; b) $n = 7k + 3$; $n = 7k + 5$, $n = 7k + 6$; c) $n \in \varnothing$. **58.** Fie $d = (1995x + 1, 1996x + 2) \Rightarrow$ $\Rightarrow d \mid 1995x + 1, d \mid 1996x + 2 \Rightarrow d \mid 1995 \cdot 1996x + 1996$ și $d \mid 1995 \cdot 1996 \cdot x + 2 \cdot 1995 \Rightarrow$ $\Rightarrow d \mid 2 \cdot 1995 - 1996 \Rightarrow d \mid 1994 \Rightarrow d \in D_{1994}$.

CAP. IV. • RĂDĂCINA PĂTRATĂ •

1. 9; 9; $\frac{4}{25}$; 0,25; $\frac{16}{9}$; $\frac{16}{9}$; $\frac{64}{225}$; $\frac{49}{4}$; $\frac{1}{36}$; 100 **2.** 0; 1; 4; 9; 16; 25; 36; 49; 64; 81; 100; 121; 144; 169; 196; 225; 256; 289; 324; 361; 400; 441; 484; 529; 576; 625; 676; 729; 784; 841; 900; 961. **3.** Notăm $u(n)$ - ultima cifră a numărului n.

$u(n)$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$u(n^2)$	0	1	4	9	6	5	6	9	4	1

4. a) $u\left(6^{1996} + 1\right) = 7$; b) $u\left(3^{1997} + 5^{1996}\right) = 8$; c) $u(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 1996 - 13) = 7$; d) $\underbrace{11\ldots1}_{1995 \text{ cifre}}$ este divizibil cu 3 și nu este divizibil cu 9; e) este divizibil cu 2 și nu este divizibil cu 4; f) este divizibil cu 5 și nu este divizibil cu 25. **5.** a) $u(5n + 2) \in \{2; 7\}$; b) $u(5n + 3) \in \{3; 8\}$; c) $u(5n - 7) \in \{3; 8\}$; d) $u(6^n + 2) = 8$; e) $u(15^n + 3) = 8$; f) este divizibil cu 5 și nu este divizibil cu 25; g) este divizibil cu 2 și nu este divizibil cu 4. **6.** a) Presupunem că $\sqrt{7} \in \mathbf{Q} \Rightarrow \sqrt{7} = \frac{a}{b}$, $a, b \in \mathbf{N}^*$ și $(a; b) = 1$. $\sqrt{7} = \frac{a}{b} \Rightarrow 7 = \frac{a^2}{b^2} \Rightarrow 7b^2 = a^2 \Rightarrow a \vdots 7 \Rightarrow a = 7a'$. $7b^2 = 49a'^2 \Rightarrow b \vdots 7$. Deci $a \vdots 7$ și $b \vdots 7$ ceea ce contrazice faptul că $(a; b) = 1$; b) Se presupune că este rațional și se ajunge la concluzia falsă că $\sqrt{3}$ este rațional; c) analog cu b); d) $u(3^{100} + 2^{101}) = 3$. **7.** a) 16; b) 12; c) 9; d) 17^4; e) 0; f) 36; g) 3^5; h) 4. **8.** 24; 39; 830; 102; 3001; 913; 789; 3020; 880; 990. **9.** a) 4; b) 11; c) 44; d) 33; e) 182. **10.** a) 6; b) 15; c) 153; d) – 40; e) 5. **11.** 3,3; 5,5; 0,11; 0,22; 0,66; 0,099. **12.** 3,4; 11; 35,1; 21,4; 5,8; 31,4. **13.** a) 0,34; b) 0,35; c) 3,64; d) 0,87; e) 9,74. **14.** 16; 45; 27; 64; 8; 49; 225; 0,4. **15.** a) $\sqrt{100} \le \sqrt{\overline{1xy}} \le$ $\le \sqrt{199} \Leftrightarrow 10 \le \sqrt{\overline{1xy}} \le 14 \Leftrightarrow 10^2 \le \overline{1xy} \le 14^2 \Rightarrow \overline{1xy} \in \{100; 121; 144; 169; 196\} \Rightarrow$

Scanned with OKEN Scanner

$\Rightarrow (x, y) \in \{(0; 0); (2; 1); (4; 4); (6; 9); (9; 6)\}$; b) $x = 0$; c) $x = 9, y = 2$; d) $x = 0, y = 0$. **17.** a) $\frac{6}{5}$; b) $\frac{13}{14}$; c) $\frac{9}{7}$; d) $\frac{1}{11}$; e) 1; f) 3^{12}; g) 18; h) $\frac{3}{2}$; i) $\frac{7}{2}$; j) $\frac{18}{5}$; k) $\frac{23}{2}$. **18.** a) 50; b) 9; c) 33; d) $\frac{4}{3}$; e) $\frac{10}{7}$; f) 72. **19.** a) 5; b) 9; c) 8; d) 32; e) 26. **20.** a) $\sqrt{\frac{6 \cdot 2^2 \cdot 5^2}{x}} \in \mathbf{N} \Leftrightarrow x \in \{6; 24; 150; 600\}$; b) $x \in \{4; 19; 44; 79; 179; 719\}$; c) $x \in \{0; 6; 24\}$; d) $x \in \{30; 120; 270; 480; 750\}$. **21.** a) $5\sqrt{2} > 4\sqrt{3}$; b) $-3\sqrt{2} < -2\sqrt{3}$; c) $-\sqrt{2} > -\frac{3}{2}$; d) $2 - \sqrt{3} > \sqrt{5} - 2$. **22.** a) $-\frac{3}{\sqrt{2}} < -\frac{3}{2} < -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} < -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4}} < -\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{2}} < -\frac{\sqrt{3}}{4}$; b) $-7\sqrt{4} < -8\sqrt{3} < -6\sqrt{5} < -4\sqrt{11} < -5\sqrt{7}$. **24.** a) 5; b) 17; c) -17. **25.** a) 6; b) 2; c) $\sqrt{3}$; d) $\frac{7}{2}$. **26.** a) $A = \{2; 3; 4\}$; b) $\{0; 1; 2; 3; 4\}$; c) $\{0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 64, 81\}$; d) $\{4; 5\}$; e) $\{7; 8\}$. **27.** a) 5; b) $\frac{7\sqrt{2}}{2}$; c) $\frac{50}{3}$; d) $\frac{176}{3}$. **28.** a) $-3\sqrt{3}$; b) $4\sqrt{7}$; c) 0; d) $\sqrt{3} - \sqrt{11}$; e) 0; f) $\frac{16}{7}$. **29.** a) -1; b) 7; c) $2 - \sqrt{2}$; d) 2. **30.** a) $\sqrt{2}(1 + 2 + ... + 10) = 55\sqrt{2}$; b) $100\sqrt{2}$. **31.** a) 612 m; b) 93,6 cm; c) 12,08 dm. **32.** 37; 28. **33.** 1023; 1086; 1151. **35.** Numărul este divizibil cu 11 și nu este divizibil cu 11^2. **36.** a) $\sqrt{576} = 24$; b) $\sqrt{1369} = 37$. **37.** a) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$; 2; b) $8\sqrt{3}$; $6\sqrt{5}$; c) $3\sqrt{10}$; $10\sqrt{5}$; d) $\frac{53}{15}$; 3; e) $\frac{3}{8}$; $\frac{\sqrt{5}}{6}$. **38.** 19881. **39.** $\sqrt{\overline{ab} - \overline{ba}} = 3\sqrt{a - b} \Rightarrow a - b \in \{1; 4\} \Rightarrow (a, b) \in \{(2; 1); (3; 2); (4; 3); (5; 4); (6; 5); (7; 6); (8; 9); (9; 8); (5; 1); (6; 2); (7; 3); (8; 4); (9; 5)\}$. **40.** $n = 4k \Rightarrow u(2^n + 1) = 7 \Rightarrow \sqrt{2^n + 1} \notin \mathbf{N}$; $n = 4k + 1 \Rightarrow u(2^n + 1) = 3 \Rightarrow \Rightarrow \sqrt{2^n + 1} \notin \mathbf{N}$; $n = 4k + 2 \Rightarrow u(2 \cdot 3^n + 9) = 7 \Rightarrow \sqrt{2 \cdot 3^n + 9} \notin \mathbf{N}$; $n = 4k + 3 \Rightarrow \Rightarrow u(2 \cdot 3^n + 9) = 3 \Rightarrow \sqrt{2 \cdot 3^n + 9} \notin \mathbf{N}$. **41.** $\frac{1}{3}$. **42.** $n^2 = 4,84 \Rightarrow n = 2,2 \Rightarrow n^7 = 2,2^7$.

CAP. V. • INTRODUCERE ÎN GEOMETRIE •

3. Cu ajutorul riglei se trasează deapta AB; se notează cu C și D punctele de intersecție ale acestei drepte cu d și d'. Acestea sunt punctele cerute. **4.** A și C sunt de aceeași parte a dreptei d, B și D sunt de o parte și de alta a dreptei d; la fel A și D. **5.** Se construiește dreapta AB; notăm $\{C\} = AB \cap d$ și $\{D\} = AB \cap d'$. **6.** Toate punctele A, B, C, M, N sunt coliniare. Dacă presupunem că B nu este între M și N atunci putem avea ordinea M, N, B, dar atunci N nu mai este între B și C. Dacă B nu este între M și N și avem ordinea B, M, N atunci obținem o contradicție cu ipoteza: M este între A și B. **7.** Fie punctele $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$. Dacă unim punctul A_1 cu celelalte 5 obținem 5 drepte. Unim A_2 cu celelalte puncte (A_3, A_4, A_5, A_6) și obținem 4 drepte; unim A_3 cu A_4, A_5, A_6 și obținem 3 drepte, apoi A_4 cu A_5, A_6 și obținem 2 drepte și în sfârșit A_5 cu A_6 și obținem încă o dreaptă. Avem în total: $1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$ drepte distincte. *Altfel*: unim A_2 cu toate celelalte puncte și obținem 5 drepte ș.a.m.d. Numărul total de drepte este $\frac{5 \cdot 6}{2} = 15$ drepte. *Generalizare*. Numărul total de drepte este: $\frac{(n - 1) \cdot n}{2}$. **8.** 4 drepte. **9.** Se obțin trei drepte noi. **10.** Se pot trasa 6 semidrepte: $[AB$; $[AC$; $[BA$;. $[BC$; $[CA$; $[CB$. **11.** $M \in [AB]$; $E \notin [AB]$, $M \in (AB)$, $M \notin [BE]$; $C \notin (AB)$. **12.** A, B, C coliniare și B, C, D coliniare, implică, A, B, C, D coliniare, C, D, E coliniare și A, B, C, D

Scanned with OKEN Scanner

coliniare, implică A, B, C, D, E coliniare. **13.** Dacă presupunem că $A \notin [MN]$ putem avea ordinea N, M, A sau A, N, M și obținem în fiecare caz contradicții cu ipotezele: $M \in [AC$, respectiv $N \in [AD$. **14.** $[CD] = [CB \cap [DA$. **15.** b) O se poate alege pe $[AC]$ sau pe $[BD]$; c) $\{O\} = AC \cap BD$. **16.** Dacă $a \not\subset (d, A$ atunci există $B \in a$, astfel încât B se află de partea opusă a lui d față de A; atunci $a = AB \cap d \neq \emptyset$, contradicție cu ipoteza. **19.** $(\forall) M \in [BC]$, $M \notin d \Rightarrow [BC] \cap d = \emptyset$. **20.** $[KI] \cap$ $\cap d = \emptyset$. **21.** $[A_0A_1]$, $[A_0A_2]$, $[A_0A_3]$, $[A_0M]$, $[A_1A_2]$, $[A_1A_3]$, $[A_1M]$, $[A_2A_3]$, $[A_2, M]$, $[A_3, M]$. **21.** $AC + BD = AB + BC + BC + CD = AB + BC + CD + BC = AD + BC$. **23.** 12 segmente. **24.** $AC = AB + BC = 3\,\text{cm} + BC$; $BD = BC + CD = BC + 3\,\text{cm}$. **25.** a) Dacă B este între C și D, atunci $[AB] \cap [CD] = [CD]$. Dacă A este între D și C, atunci $[AB] \cap [CD] = [CD]$; b) $[AC] \equiv [BD]$ dacă B este între C și D. **26.** Ordinea este A, D, C, B. **27.** $OB =$ $= 57\,\text{mm} - 45\,\text{mm} = 12\,\text{mm}$; $OC - BC - BO = 17\,\text{mm}$; $AC = 45\,\text{mm} - 17\,\text{mm} = 28\,\text{mm}$; sau $OB =$ $= 12\,\text{mm}$, $OC = 41\,\text{mm}$, $AC = 86\,\text{mm}$. **28.** $IJ = IB + BC + CJ = \frac{AB}{2} + BC + \frac{CD}{2} =$ $= \frac{AB + 2BC + CD}{2} = \frac{AC + BD}{2}$ **29.** $MA + MB = MB + BA + MB = 2MB + 2OB =$ $= 2 \cdot (MB + BO) = 2 \cdot MO$. **30.** Fie A, B, C în această ordine; notăm $IB = a$ și atunci $BC = x - 2a$, $IJ = IB + BJ = a + \frac{x - 2a}{2} = \frac{x}{2}$. Dacă ordinea punctelor este C, A, B obținem $IJ = \frac{x}{2}$. **31.** $CD = 2$ cm. **32.** a) $CB - CA = AB = 2 \cdot IA$; $2 \cdot IC = CA + AI + CA + IB = CA + CB$. b) $2IA = AB =$ $= CA + CB$; $CB - CA = CI + IB - (IA - CI) = 2IC$. **33.** Deoarece $[AC] \equiv [CB]$, $[AD] \equiv [DC]$, $[CE] \equiv [EB]$ rezultă $[DC] \equiv [CE]$. **34.** $AC = 4$ cm; $AD = 6$ cm; $BC = 3$ cm; $BD = 5$ cm. **35.** $OI =$ $= 8$ cm; $OI = 2$ cm; $OI = 4{,}7$ cm; $OB = 16$ cm; $OA = 1{,}3$ cm; $OB = 28$ cm. **36.** $M(6)$, $AB = b - a$; $\frac{AB}{2} = \frac{b - a}{2}$, M are coordonata: $a + \frac{b - a}{2} = \frac{a + b}{2}$. **37.** a) $A_{18}A_{31} =$ $= (31 - 18) \cdot 1\,\text{cm} = 13\,\text{cm}$; b) Segmentele care au punctul A_{21} ca mijloc sunt: $[A_{20}, A_{22}]$; $[A_{19}, A_{23}]$; $[A_{18}, A_{24}]$, ..., $[A_0, A_{42}]$ deci în total 24 de segmente; c) A_{20}. **38.** Notăm $AM = a$ și $PB = x$; avem $MP = a - x$; $QM = QP - MP = x - (a - x) = 2x - a$; $AQ = AM - QM =$ $= a - (2x - a) = 2 \cdot (a - x) = 2 \cdot MP$. **39.** $A_0A_2 = \frac{5}{2}$; $A_0A_3 = \frac{5}{2^2}$; $A_0A_4 = \frac{5}{2^5}$; $A_0A_{12} =$ $= \frac{5}{2^{11}}$. Lungimea segmentului $[A_0A_n]$, adică $\frac{5}{2^{n-1}}$, când n crește oricât de mult, se apropie de zero!

CAP. VI. ◆ UNGHIURI ◆

1. a) $\sphericalangle AOC$; $\sphericalangle BOC$; $\sphericalangle O$ b) E, M, D. c) A, B, D, E, M. d) (AC), (BC), (PQ) unde P și Q sunt intersecțiile dreptei MD cu $(OA$ și $(OC$. **2.** 180°,110°. **3.** $m(\sphericalangle XOY) + m(\sphericalangle XOY) = 180° \Rightarrow 4\,m(\sphericalangle XOY) =$ $= 180° \Rightarrow m(\sphericalangle XOY) = 45° \Rightarrow m(\sphericalangle XOY') = 135°$. **4.** $m(\sphericalangle AOC) + m(\sphericalangle BOC) = 180° \Rightarrow 2 \cdot m(\sphericalangle BOC) +$ $+ 50° = 180° \Rightarrow m(\sphericalangle BOC) = 65°$. **5.** $m(\sphericalangle AOM) + m(\sphericalangle MOP) + m(\sphericalangle POB) = 180°$; a) 60°; b) 120°; c) 120°. **6.** $m(\sphericalangle BOD) = 180° - m(\sphericalangle AOB) = 160° \Rightarrow m(\sphericalangle BOC) + m(\sphericalangle COD) = 160° \Rightarrow m(\sphericalangle COD) =$ $= 40° \Rightarrow m(\sphericalangle BOC) = 120°$, $m(\sphericalangle COA) = 140°$. **7.** $\frac{m(\hat{XOA})}{2'} = \frac{m(\hat{AOB})}{3} = \frac{m(\hat{BOY})}{5} = \frac{180°}{2 + 3 + 5} =$ $= 18° \Rightarrow m(\sphericalangle XOA) = 36°$, $m(\sphericalangle AOB) = 54°$, $m(\sphericalangle BOY) = 90°$. **8.** $m(\sphericalangle ABD) = x \Rightarrow m(\sphericalangle CBE) =$ x, $m(\sphericalangle DBE) = 2x \Rightarrow 4x = 180° \Rightarrow x = 45°$. Deci: $m(\sphericalangle ABD) = m(\sphericalangle CBE) = 45°$ și $m(\sphericalangle DBE) =$ $90°$. **9.** I. $m(\sphericalangle BOC) = 180°$ (vezi fig. 1). II. $m(\sphericalangle BOC) = 40°$ (vezi fig. 2). **10.** 150° sau 20°. **11.** $m(\sphericalangle AOB) = m(\sphericalangle BOC) = m(\sphericalangle COD) = m(\sphericalangle DOE) = 45°$ (vezi fig. 3). **12.** 37° 30'. **13.** 53° 1'. **14.** $m(\sphericalangle AOB') = 140° \Rightarrow (\sphericalangle COB') = 160°$. **15.** a) 120°; b) 60°. **16.** a) $m(\sphericalangle XOZ) = 360° -$ $[m(\sphericalangle XOY) + m(\sphericalangle YOZ)] = 160°$; b) 100°. **17.** 160°. **18.** a) $m(\sphericalangle BOC) = m(\sphericalangle AOC) - m(\sphericalangle AOB)$

$\Rightarrow m(\sphericalangle BOC) = 20°$. b) $m(\sphericalangle DOE) = 35°$ (vezi fig.4). **19.** a) 80°; b) 140°. **20.** 140°. **21.** 65°. **24.** $m(\sphericalangle AOC) + m(\sphericalangle BOD) = 2m(\sphericalangle BOX) + m(\sphericalangle BOC) = 2m(\sphericalangle COY) + m(\sphericalangle BOC) = 2[m(\sphericalangle BOX) + m(\sphericalangle BOC) + m(\sphericalangle COY)] = 2m(\sphericalangle XOY) = 180°$. **26.** 45°. **27.** Fie x măsura complementului unghiului respectiv; $x + \frac{2}{3}x = 90 \Rightarrow x = 54°$. Deci unghiul cerut are măsura 36°. **28.** 37° 30', 52° 30'. **29.** 65°. **30.** $\frac{x}{180-x} = \frac{1}{5} \Rightarrow \frac{x}{180-x+x} = \frac{1}{5+1} \Leftrightarrow \frac{x}{180} = \frac{1}{6} \Rightarrow x = 30°$. **31.** 80°. **32.** Fie x și y măsurile celor două unghiuri; $x + y = 180°$, $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{x+y}{5} \Rightarrow x = 72°, y = 108°$. **33.** 40°. **34.** 110°. **35.** $m(\sphericalangle AOD) - [m(\sphericalangle AOB) + m(\sphericalangle BOC)] \Rightarrow m(\sphericalangle COD) = 65°$ (vezi fig. 5). **36.** Fie $(OA'$ semidreapta opusă lui $(OA; m(\sphericalangle BOA') = 56° \Rightarrow m(\sphericalangle A'OC) = 56°$ (vezi fig. 6). **37.** 140°; 40°. **38.** Suma măsurilor celor două unghiuri este 120°. Fie x și y măsurile celor două unghiuri; $\frac{x}{2} = \frac{y}{4} = \frac{x+y}{6} \Rightarrow$ $\Rightarrow x = 40°, y = 80°$. **39.** a) 108°; b) 81°, 27°; c) 99°. **40.** a) $m(\sphericalangle AOC) = 20°$, $m(\sphericalangle AOB) = 8°$; b) 14°. **42.** a) 60°; b) 120°. **43.** $m(\sphericalangle BOD) = 90° \Rightarrow m(\sphericalangle BOA) = 90° \Rightarrow m(\sphericalangle AOC) = 30°$ și $m(\sphericalangle BOC) = 60°$. Unghiul dintre bisectoarele unghiurilor $\sphericalangle BOD$ și $\sphericalangle BOC$ are măsura 75°. Unghiul dintre bisectoarele unghiurilor $\sphericalangle AOB$ și $\sphericalangle AOC$ are măsura de 30°. **44.** $m(\sphericalangle BOD) + m(\sphericalangle AOC) = 90° \Rightarrow m(\sphericalangle AOC) = 45°$ și $m(\sphericalangle BOC) = 135°$. **45.** $m(\sphericalangle XOU) = 45°$, $m(\sphericalangle UOT) = 45°$, $m(\sphericalangle UOZ) = 5°$, $m(\sphericalangle YOU) = 25°$. **46.** 2, 3, 4 sau 5. **47.** 1, 2 sau 3. **49.** $m(\sphericalangle AOB) = 2m(\sphericalangle BOC) = 2x$, $m(\sphericalangle DOC) = 3x$, $m(\sphericalangle DOA) = x \Rightarrow 7x = 360° \Rightarrow x = \frac{360°}{7}$. **50.** 36°, 48°, 72°, 90°, 108°. **51.** 96°, 120°, 144°. **54.** $m(\sphericalangle EOC) = 180° - m(\sphericalangle COF) = 130°$; $m(\sphericalangle AOF) = 180° - m(\sphericalangle EOF) = 130°$; $m(\sphericalangle AOB) = 180° - [m(\sphericalangle BOC) + m(\sphericalangle AOF)] = 30°$; $m(\sphericalangle BOD) = m(\sphericalangle BOC) + m(\sphericalangle COD) = 85°$; $OB \perp OD$. **55.** a) 120°; b) semidrepte opuse. **56.** a) 120°; b) 60°. **57.** a) 42° 30'; 42° 30'; 137° 30'; 137° 30'; b) 110°, 110°, 70°, 70°. **58.** 65°, 65°, 115°, 115°. **60.** $m(\sphericalangle COD) = m(\sphericalangle AOC) + m(\sphericalangle AOD) = m(\sphericalangle BOD) + m(\sphericalangle AOD) = m(\sphericalangle AOB) = 180°$. **61.** 45°, 45°, 135°, 135°. **62.** a) 170°; b) 10°; c) 125°. **63.** 108°. **64.** $m(\sphericalangle AOD) = 60°$, $m(\sphericalangle BOC) = 60°$; $m(\sphericalangle AOC) = 120°$, $m(\sphericalangle COD) = 180°$, $m(\sphericalangle EOF) = 90°$. **69.** a) $m(\sphericalangle AOB) = 60°$, $m(\sphericalangle BOC) = 120°$; b) Dacă $(OE$ este bisectoarea unghiului $\sphericalangle BOD \Rightarrow m(\sphericalangle EOC) = 75° \Rightarrow OE \perp AC$. **71.** a) 60°, 40°, 80°; b) 110°; c) 20°. **74.** a) $m(\sphericalangle BOC) = 60°$, $m(\sphericalangle AOB) = 120°$; b) 90°. **75.** $m(\sphericalangle AOB) = 22° 30'$, $m(\sphericalangle BOC) = 45°$, $m(\sphericalangle AOC) = 67° 30'$. **76.** a) $m(\sphericalangle COE) = 60°$, $m(\sphericalangle AOD) = 60°$, $m(\sphericalangle DOE) = 30°$, $m(\sphericalangle BOD) = 120°$; b) 135°. **77.** a) $m(\sphericalangle BOC) = 50°$, $m(\sphericalangle COE) = 40°$, $m(\sphericalangle EOD) = 50°$; b) 135°. **78.** a) $m(\sphericalangle DOC) = 100°$; b) semidrepte opuse. **79.** $m(\sphericalangle BOD) = 20°$, $m(\sphericalangle AOF) = 110°$, $m(\sphericalangle EOF) = 30°$, $m(\sphericalangle EOD) = 130°$. **80.** $m(\sphericalangle BOF) = 90° - x$, $m(\sphericalangle EOF) = x$, $m(\sphericalangle COE) = 90° - x$, $m(\sphericalangle DOC) = x$, $m(\sphericalangle AOD) = 180° - x$. **81.** $m(\sphericalangle EON) = 50°$, $m(\sphericalangle EOP) = 50°$, $m(\sphericalangle POM) = 10°$, $m(\sphericalangle AOM) = 100°$, $m(\sphericalangle AOF) = 40°$, $m(\sphericalangle FON) = 130°$. **82.** a) 135°; b) sunt opuse. **83.** $m(\sphericalangle AOM) = 160°$, $m(\sphericalangle AON) = 20°$, $m(\sphericalangle BON) = 70°$, $m(\sphericalangle MOB) = 110°$.

CAP. VII. ◆ TRIUNGHIUL ◆

1. a) $MN = 5$, $m(\sphericalangle ACB) = 40°$. **2.** DA. **3.** $P = 11$ cm. **4.** $l = 12$. **5.** $l = 16$. **6.** triunghi echilateral. **8.** imposibil. **12.** a) $\Delta MBC \equiv \Delta NCB \Rightarrow BN = CM$; b) $\Delta MBC \equiv \Delta NCB \Rightarrow m(\sphericalangle NBC) = m(\sphericalangle MCB) \Rightarrow \Delta PBC$ isoscel $\Rightarrow BP = PC$; c) $\Delta APB \equiv \Delta APC \Rightarrow \sphericalangle BAP \equiv \sphericalangle PAC$. **14.** $\Delta AMP \equiv \Delta BNM \equiv \Delta CPN \Rightarrow MP = PN = MN$. **15.** Se arată că: $\Delta ABD = \Delta ACE$. **16.** $\Delta EAC \equiv \Delta BAG$, etc. **17.** Construim triunghiul echilateral ABD și apoi pe $(BD$ construim $[DC] \equiv [BD]$. **18.** $\Delta ABC \equiv \Delta AMN$ $MN = BC$. **19.** $\Delta ABD \equiv \Delta ACE \Rightarrow AD = AE$. **20.** a) $\Delta CMT \equiv \Delta BNS$ (*L.U.L.*) $\Rightarrow \Rightarrow (MT) \equiv (NS)$; b) a) $\Rightarrow \sphericalangle QMN \equiv \sphericalangle QNM \Rightarrow (QM) \equiv (QN)$; c) $\Delta AQS \equiv \Delta AQT \Rightarrow \sphericalangle SAQ \equiv \sphericalangle TAQ$. **21.** Fie $B'' \in (CB$ așa încât $(CB'') \equiv (C'B')$. Dacă $B' \in (BC)$ avem $A'B' + B'C' = AB'' + B''C <$

$< AB + BC$, *contradicție*. Analog se ajunge la contradicție dacă $B \in (B''C)$. Deci $B = B''$ și $\Delta ABC = \Delta A'B'C'$ (*L.U.L.*). **22.** $\Delta BCM \equiv \Delta CBN$ (*L.U.L.*) $\Rightarrow (BN) \equiv (CM)$. **23.** b) $m(\sphericalangle MCB) + m(\sphericalangle BCA) = 90° \Rightarrow MC \perp AC$. Analog $NC \perp BC$; c) $\Delta ABM \equiv \Delta PBC \Rightarrow (AM) \equiv (CP)$; $\Delta(ACM) \equiv \Delta(NCB) \Rightarrow (AM) \equiv (BN)$. **25.** $\sphericalangle BAD \equiv \sphericalangle ECB$ (au același complement, $\sphericalangle B$). $\Delta ABD \equiv \Delta CEB \Rightarrow [BE] \equiv [BD] \Rightarrow m(\sphericalangle EDB) = 45°$, deci $m(\sphericalangle MDE) = 45°$. Analog $m(\sphericalangle ADF) = 45°$, deci $m(\sphericalangle EDF) = 90°$. **26.** $\Delta AOB \equiv \Delta DOE \Rightarrow AB = DE$, analog $BC = EF$ și $AC = DF$. Prin urmare $\Delta ABC \equiv \Delta DEF$. **27.** $\Delta ABE \equiv \Delta ACD$ (*L.U.L.*) $\Rightarrow (BE) \equiv (CD)$; b) $\sphericalangle QBC \equiv \sphericalangle QCB \Rightarrow (QB) \equiv (QC) \Rightarrow \Delta ABQ \equiv \Delta ACQ \Rightarrow \sphericalangle BAQ \equiv \sphericalangle CAQ$ etc. **28.** a) Presupunem că $AC > AB$ și că există $P \in (AC)$ astfel încât $\Delta PBM \equiv \Delta PCM$; deci: $[PB] \equiv [PC]$. În ΔBPC isoscel, PM este mediană și înălțime; b) $m(\sphericalangle C) = 30°$, $m(\sphericalangle B) = 60°$, $AB = BM \Rightarrow \Delta ABM$ isoscel și (BP bisectoare $\Rightarrow BP \perp AM$. **29.** Prelungim $[BM]$ cu $[MN]$, $(MN = BM)$ și $[B'M']$ cu $[M'N']$ $(M'N' = B'M')$. $\Delta BMC \equiv \Delta NMA$, $\Delta B'M'C' \equiv \Delta N'M'A'$, deci $AN = BC = B'C' = A'N'$; obținem $\Delta ABM \equiv \Delta A'B'M'$ de unde $AM = A'M'$. Deci $AC = A'C'$ și $\Delta ABC \equiv \Delta A'B'C'$. **30.** $\sphericalangle MBC = \sphericalangle MCB \Rightarrow (MB) \equiv (MC) \Rightarrow \Delta AMB \equiv \Delta AMC \Rightarrow \sphericalangle MAB \equiv \sphericalangle MAC$ **31.** $\Delta OAB' \equiv \Delta OBA' \Rightarrow \sphericalangle AB'O \equiv \sphericalangle BA'O$ și $\sphericalangle B'AA' \equiv \sphericalangle A'BB'$. $\Delta MAA' \equiv \Delta MBB' \Rightarrow MA' = MB'$. $\Delta OA'M \equiv \Delta OB'M \Rightarrow [OM$ bisectoare. **32.** $\Delta ADP \equiv \Delta ADR \Rightarrow [AP] \equiv [AR]$, deci ΔAPR este isoscel, (AD este bisectoare $\Rightarrow [AD]$ este înălțime $\Rightarrow AD \perp PR$. **34.** a) $\Delta MBD \equiv \Delta PCE \Rightarrow MD = PE$; b) Se arată că $\Delta AMD = \Delta APE$. **36.** Fie (AD bisectoarea unghiului $\sphericalangle A$, $D \in (BC)$. Se arată că $(MD) \equiv (ND)$ și $MN \perp AD$. **37.** ΔACO este echilateral. Punctul I aparține bisectoarei unghiului $\sphericalangle C$ care este și mediatoare în ΔACO, deci $IA = IO$. **38.** b) 24 cm. **39.** Fie (BF bisectoarea unghiului B, $F \in (AC)$. F se află pe mediatoarea lui $[BC]$, deci $[FX] \equiv [FB] \Leftrightarrow \sphericalangle FCB \equiv \sphericalangle FBC \Leftrightarrow m(\sphericalangle B) = 2\,m(\sphericalangle C)$. **40.** a) $\Delta MPQ \equiv \Delta NQP \Rightarrow \sphericalangle PMQ = \sphericalangle PNQ$; $\Delta BMR \equiv \Delta CNS \Rightarrow \sphericalangle NSC \equiv \sphericalangle MRB \Rightarrow \Delta SIR$ isoscel; b) I este centru de greutate în $\Delta APQ \Rightarrow AI$ mediană $\Rightarrow AI$ este înălțime; c) Se arată că tiunghiul ASR este isoscel și că mijlocul lui $[BC]$ coincide cu mijlocul lui $[SR]$. **41.** Se arată că $[BM] \equiv [BC]$ și $[QM] \equiv [QC]$; $\Delta QMP \equiv \Delta QCN \Rightarrow MP = CN$; b) $\Delta BMQ \equiv \Delta BCQ$. În ΔBMC, bisectoarea $[BQ$ este și înălțime $\Rightarrow BQ \perp MC$. **42.** Construim $DG \perp BC$, $G \in (BC)$ și avem: $CG = GE$; $\Delta BEF \equiv \Delta CGD \Rightarrow CD = BF \Rightarrow AF = AD$. **43.** Dacă X' este proiecția lui X pe $[AB]$ și Y' este proiecția lui Y pe AB se arată că $\Delta XX'M \equiv \Delta YY'M$. **45.** Fie $m(\sphericalangle DAB) = x$. Avem $m(\sphericalangle EDA) = 90° - \frac{x}{2}$, $m(\sphericalangle ACB) = 80° - \frac{x}{2}$, $m(\sphericalangle ADB) = 100° - \frac{x}{2}$, $m(\sphericalangle BDE) = 10°$. **46.** $m(\sphericalangle ACB) = m(\sphericalangle BFC) = 80° \Rightarrow BF = BC$; $m(\sphericalangle BEC) = m(\sphericalangle BCE) = 50° \Rightarrow BE = BC$. Deci $m(\sphericalangle EBF) = 80° - 20° = 60° \Rightarrow \Delta BEF$ este echilateral. **47.** $DH \parallel AB$, $H \in (BC) \Rightarrow \Delta DH$ isoscel $\Rightarrow [DF] \equiv [FE]$. **48.** Fie ABC un triunghi echilateral de latură $l = 2$, iar A', B', C' mijloacele laturilor. Unind punctele A', B', C' se formează 4 triunghiuri echilaterale de latură 1. Având 5 puncte, cel puțin două se vor găsi în interiorul său sau pe laturile unui triunghi din cele 4. **51.** a) $m(\sphericalangle AIE) = 70°$; b) $m(\sphericalangle AEI) = 80°$, $m(\sphericalangle AIE) = 70° \Rightarrow m(\sphericalangle EAI) = 30°$; $\Delta BAD \Rightarrow m(\sphericalangle B) = 60°$, $m(\sphericalangle A) = 80°$. **53.** Fie $D \in (OP)$ așa încât $OD = OA$; ΔAOD este echilateral, de unde $OA = AD$ și $m(\sphericalangle ADP) = 120°$; $\Delta ADP \equiv \Delta AOB \Rightarrow PA = AB$. Analog $PB = AB$. **55.** Se arată că $\sphericalangle MAB \equiv \sphericalangle MBA$ și $\sphericalangle MAD \equiv \sphericalangle MDA$, deci $[MB] \equiv [MA] \equiv [MD]$. **56.** Prelungind NQ cu $[SQ] \equiv [QN]$, avem $SP = MN$. Mai avem $SP = NR \Rightarrow MN = NR$. **57.** a) Arătăm că $\sphericalangle DPB \equiv \sphericalangle DBP$, deci $[DP] \equiv [DB] \equiv [DA]$. $\sphericalangle AQB \equiv \sphericalangle APD \equiv \sphericalangle QAB$; b) Fie punctul S astfel încât D este mijlocul lui $[CS]$. Se arată că S și E coincid. **60.** a) $\Delta ANC \equiv \Delta MNC \Rightarrow AC = MC$; $BC = 2MC \Rightarrow BC = 2AC$; b) Din a) rezultă că CP este mediatoarea segmentului $[AM]$ și atunci $[PA] \equiv [PM]$. **61.** a) $BM = x$, $NC = 2x$, $MN = 12 - 3x$, $\frac{x + 12 - 13x}{12 - 3x + 2x} =$

$= \frac{4}{5} \Rightarrow x = 2$, deci $BM = 2$, $MN = 6$, $NC = 4$; b) ΔABN este isoscel, deci mediana BF este și bisectoare. Analog în ΔACM; c) $BF \| PN$ și cum $AF = FN$ obținem: $AB = BP$. **62.** Fie $\{Q\} = AD \cap PR$. $\Delta ADP \equiv \Delta ADR \Rightarrow (AP) \equiv (AR)$; $\sphericalangle PAQ \equiv \sphericalangle RAQ \Rightarrow AQ \perp PR$; $Q \in AD \Rightarrow AD \perp PR$. **63.** a) $\Delta MBE \equiv \Delta NCD$; rezultă $(ME) \equiv (ND)$; b) Se arată că $(AP$ este bisectoare în triunghiul isoscel ABC. **63.** Se arată că $m(\sphericalangle PHQ) = m(\sphericalangle ABQ)$ și deci: $m(\sphericalangle PMQ) = 90° - \frac{m(\hat{BAC})}{2} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 2m(\sphericalangle ABC) + m(\sphericalangle BAC) = 180° \Leftrightarrow m(\sphericalangle ABC) = m(\sphericalangle ACB)$. **65.** a) $\frac{BM}{MC} = \frac{NC}{NB} \Rightarrow \frac{BM}{BC} = \frac{k}{k+1} \Rightarrow BM = BC \cdot \frac{k}{k+1} = CN$. $\Delta ABM \equiv \Delta ACN \Rightarrow AM = AN$. **66.** 2) $\Delta ABC \equiv \Delta AC'B' \Rightarrow$ $\Rightarrow \sphericalangle C \equiv \sphericalangle B'; \sphericalangle B \equiv \sphericalangle C'$. Cum $AH \perp BC$ rezultă $m(\sphericalangle HAB) = 90° - m(\sphericalangle B) = m(\sphericalangle C)$; dar $\sphericalangle HAB \equiv$ $\equiv \sphericalangle B'AM$ și $\sphericalangle B' \equiv \sphericalangle C$. Atunci: $\sphericalangle HAB \equiv \sphericalangle B'AM \equiv \sphericalangle B' \Rightarrow [AM] = [B'M]$. La fel $[MA] \equiv [MC']$. **67.** Prelungim $[AB]$ cu $[BE] \equiv [DC]$ și $[AC]$ cu $[CF] \equiv [BD]$. Atunci triunghiul AEF este isoscel și cum (AD este bisectoare rezultă $AD \perp EF$. Fie $\{M\} = EF \cap AD$; DM este mediatoare, deci $[DE] \equiv [DF]$. $\Delta BDE \equiv \Delta CFD \Rightarrow \sphericalangle DBE \equiv \sphericalangle DCF \Rightarrow \sphericalangle ABD \equiv \sphericalangle ACD \Rightarrow [AB] \equiv [AC]$. **68.** $DA = DC$, $m(\sphericalangle DAC) =$ $= 72°$, $m(\sphericalangle ADC) = 36°$, $m(\sphericalangle B) = 36° \Rightarrow CB = CD$. **69.** Construim $EF \perp AC$, $\sphericalangle BEA = \sphericalangle FEA =$ $= \sphericalangle EAB$. **70.** În ΔCEB, $[EM]$, este mediană și $EM = \frac{BC}{2}$; deci $m(\sphericalangle CEB) = 90° \Rightarrow CE \perp AD$; rezultă că E este ortocentrul triunghiului ACD deci $DE \perp AC$.

CAP. VIII. • DREPTE PARALELE •

1. a) 14; b) $m \cdot n + 2$. **5.** 72°; 108°. **6.** În interiorul unghiului $\sphericalangle AEC$ duceți semidreapta $[EF]$ paralelă cu AB. Comparați unghiurile alterne interne care s-au format. **7.** Calculați măsurile unghiurilor $\sphericalangle DEN$ și $\sphericalangle DEB$. Demonstrați că $EF \| AC$ și $ED \| AC$, apoi aplicați axioma lui Euclid. **8.** Patru unghiuri au măsurile de 113° 50", iar celelalte patru de 66°59' 10". **9.** Arătați că dreptele MZ și OY formează cu secanta OZ unghiuri alterne interne congruente. **10.** Calculând măsurile unghiurilor $\sphericalangle AOP$, $\sphericalangle BOP$, $\sphericalangle MPO$, $\sphericalangle NPO$, obținem $m(\sphericalangle AOP) = 25° = m(\sphericalangle OPN)$, deci $NP \| AO$ și $m(\sphericalangle BOP) = 50° =$ $m(\sphericalangle OPM)$, deci $MP \| BO$. $\sphericalangle AMP$ și $\sphericalangle BNP$ au laturile respectiv paralele. **13.** Arătați că $[AD] \equiv [DI]$ și $[BE] \equiv [IE]$ deci perimetrul triunghiului CDE este egal cu $AC + BC = 12$ cm. **20.** Demonstrați mai întâi că triunghiul ABC este isoscel. **21.** Notăm cu E punctul în care MP intersectează ND. Se arată că triunghiul MNE este isoscel deci bisectoarea $[NP$ este înălțime. **24.** $m(\sphericalangle AOC) = 20° = m(\sphericalangle OCD)$, deci $DC \| AB$ și $m(\sphericalangle BOE) = m(\sphericalangle OED) = 40°$, deci $ED \| AB$. **26.** Se arată că $[NA] \equiv [PA]$ și $m(\sphericalangle NAP) = 2m(\sphericalangle BAC)$. $NP \| BC \Leftrightarrow NP \perp AD \Leftrightarrow \sphericalangle NAD \equiv \sphericalangle DAP \Leftrightarrow \sphericalangle NAD \equiv \sphericalangle BAC \Leftrightarrow \sphericalangle NAE \equiv$ $\equiv \sphericalangle DAC$. Ținând seama că $\sphericalangle NAE \equiv \sphericalangle BAM$, obținem concluzia. **28.** Notăm cu M și N picioarele perpendicularelor duse din O pe a și b. Din ipoteză cunoaștem că $OM = ON$. Demonstrăm mai întâi că $\Delta OAM \equiv \Delta OBN$. **29.** a) Se demonstrează că $\Delta MBN \equiv \Delta CBA$ și $\Delta CQP \equiv \Delta CBA$. b) Din congruența triunghiurilor MBN și CBA rezultă că unghiurile alterne interne $\sphericalangle BMN$ și $\sphericalangle BCA$ sunt congruente. **30.** a) Se demonstrează că $AM = AN$, apoi că $\Delta MBO \equiv \Delta NCO$. b) Se demonstrează că $\Delta AMO \equiv \Delta ANO$. **31.** Se arată că triunghiurile OAB și OCD sunt isoscele. Din congruența triunghiurilor OAM și OBN deducem că $\sphericalangle AOM \equiv \sphericalangle NOB$, ceea ce se va folosi în demonstrarea congruenței triunghiurilor ODQ și OCP. **32.** a) L.U.L.; b) L.L.L.; c) Folosind punctul b) avem $\sphericalangle A \equiv \sphericalangle D$, iar din ipoteză $\sphericalangle B \equiv \sphericalangle C$. Cum suma unghiurilor patrulaterului $ABCD$ este 360°, deducem că A și B sunt suplementare deci $AD \| BC$. **33.** Arătăm că $\Delta MAB \equiv \Delta NAC$ de unde deducem $\sphericalangle MAB \equiv \sphericalangle NAC$ deci unghiurile $\sphericalangle BAC$ și $\sphericalangle MAN$ au aceeași bisectoare. Cum triunghiurile BAC și MAN sunt isoscele, bisectoarea este și înălțime. Dreptele BC și MN sunt perpendiculare pe aceeași dreaptă, deci sunt paralele.

*
* *

Scanned with OKEN Scanner

clasa a VII-a

CAP. I. ◆ NUMERE REALE ◆

1. $-5 \in \mathbf{Q}$, $\frac{\sqrt{5}}{2} \notin \mathbf{Q}$, $\sqrt{3} \notin \mathbf{Q}$, $\sqrt{12} \notin \mathbf{Q}$, $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{12}} = \frac{1}{2} \in \mathbf{Q}$, $\frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \notin \mathbf{Q}$, $\frac{1}{5} \in \mathbf{Q}$, $1+\sqrt{5} \notin \mathbf{Q}$, $\sqrt{3}+\sqrt{12} \notin \mathbf{Q}$, $3\sqrt{5}-\sqrt{45} \in \mathbf{Q}$, $5\sqrt{3}-5 \notin \mathbf{Q}$. **2.** a) Presupunem prin absurd că $\sqrt{11} \in \mathbf{Q}$ fie $\sqrt{11} = \frac{p}{q}$, unde $p, q \in \mathbf{N}$, $q \neq 0$, $(p, q) = 1$, avem $11q^2 = p^2 \Rightarrow p = 11k$, $k \in \mathbf{N} \Rightarrow$ $\Rightarrow q^2 = 11k^2$. Deoarece $k \not\vdots q \Rightarrow q = 11l, l \in \mathbf{N}$, am obținut $p = 11k$, $q = 11l$, contradicție cu $(p, q) = 1$ prin urmare $\sqrt{11} \notin \mathbf{Q}$; b) c) se demonstrează analog. **3.** $-\sqrt{3}$ și $+\sqrt{3}$; $2+\sqrt{2}$ și $2-\sqrt{2}$, $1-\sqrt{3}$, $1+\sqrt{3}$. **4.** a) $0 < \frac{\sqrt{2}}{2} < 1$; b) $0 < -\frac{1}{2}+\sqrt{2} < 1$; c) $4 < 5-\frac{1}{\sqrt{5}} < 5$; d) $1 < \frac{1}{3-\sqrt{5}} < 2$; e) $2 < \frac{10}{\sqrt{7}+2} < 3$. **5.** $x+y \in \mathbf{Q}$, $x-y \notin \mathbf{Q}$, $x \cdot y \notin \mathbf{Q}$, $\frac{x}{y} \notin \mathbf{Q}$. **6.** $3\sqrt{11}-10 < 0$; $5\sqrt{13}-18 < 0$; $10\sqrt{26}-51 < 0$; $4\sqrt{33}-23 < 0$; $8\sqrt{15}-31 < 0$. **7.** a) $\sqrt{11} > \sqrt{3}+\sqrt{2}$; b) $\sqrt{6}-1 > \sqrt{2}$; c) $\sqrt{5}-1 = \sqrt{6-2\sqrt{5}}$. **8.** a) $\left(\sqrt{2}-1\right)^2 = 3-2\sqrt{2} = \sqrt{9}-\sqrt{8}$; b) $\left(\sqrt{2}-1\right)^4 = \left(3-2\sqrt{2}\right)^2 = 17-12\sqrt{2} = \sqrt{289}-\sqrt{288}$; c) $\left(\sqrt{2}-1\right)^3 = \left(\sqrt{2}-1\right) \cdot \left(\sqrt{2}-1\right)^2 = \left(\sqrt{2}-1\right) \cdot \left(3-2\sqrt{2}\right) = 5\sqrt{2}-7 = \sqrt{50}-\sqrt{49}$. **9.** 11. **10.** $a = 10\sqrt{2}-10$; $b = 10\sqrt{2}-10$ deci $a = b$. **11.** a) $\left|\sqrt{3}-\sqrt{5}\right| + \left|1-\sqrt{3}\right| - \sqrt{5} = \sqrt{5}-\sqrt{3}+\sqrt{3}-1-\sqrt{5} =$ $= -1$; b) $3-\sqrt{3}$. **12.** $6\sqrt{2}$. **13.** Se ridică la pătrat în fiecare membru. **14.** Se folosesc formulele din exercițiul 13, avem: $\sqrt{10+2\sqrt{21}} = \sqrt{7}+\sqrt{3}$; $\sqrt{16+2\sqrt{55}} = \sqrt{11}+\sqrt{5}$; $\sqrt{14+2\sqrt{33}} =$ $= \sqrt{11}+\sqrt{3}$; $\sqrt{12+2\sqrt{35}} = \sqrt{7}+\sqrt{5}$. **15.** a) 0; b) $\left(x^2-4x\right)^{1996} = (-1)^{1996} = 1$. **16.** 8. **17.** $a < b \Rightarrow \sqrt{(a-b)^2} = |a-b| = b-a$, $a < b < -1 \Rightarrow a^2-b^2 > 0 \Rightarrow \sqrt{\left(a^2-b^2\right)^2} = a^2-b^2$, $a < b < -1 \Rightarrow a^2 > 1$, $b^2 > 1$. Se obține: $b-a+a^2-b^2+a-b-a^2+1+b^2-1 = 0$. **18.** a) 4; b) Se obține $|x-2|+|x-1|+|x+1|+|x+2|$ și deoarece $-1 \leq x \leq 1$ rezultă $-x+2+1-x+x+$ $+1+x+2 = 6$. **19.** a) $\frac{\sqrt{2}}{3}$; b) $\frac{7\sqrt{5}}{10}$; c) $-5\left(\sqrt{3}+2\right)$; d) $\frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{7}-5\right)}{9}$; e) $5+2\sqrt{6}$; f) $\sqrt{11}-$ $-\sqrt{19}$; g) $\frac{2\sqrt{5}+5\sqrt{3}}{-5}$. **20.** $\frac{13}{\sqrt{19+8\sqrt{13}}} = \frac{13}{4+\sqrt{3}} = 4-\sqrt{3}$; $\frac{6}{\sqrt{12-6\sqrt{3}}} = \frac{6}{3-\sqrt{3}} =$ $= 3+\sqrt{3}$. **21.** 2. **22.** Se amplifică fiecare fracție cu conjugata numitorului și se obține după adunare

Scanned with OKEN Scanner

2. $\frac{a+b}{a-b} \in \mathbf{Q}$. **23.** $A=\{-1\}$. **24.** $N=\frac{\sqrt{\frac{5}{2}}+\sqrt{\frac{1}{2}}-\sqrt{\frac{5}{2}}+\sqrt{\frac{1}{2}}}{\sqrt{2}}=1\in\mathbf{N}$. **25.** $x^2=10, y^2=(43-\sqrt{5})$, $x^2-y^2=4\sqrt{5}-2$. **26.** $7-4\sqrt{3}=(2-\sqrt{3})^2$. Se obține răspunsul $\frac{1}{4}$. **27.** $\frac{1}{2}$. **28.** $x<\frac{\sqrt{26}}{5}$. **29.** Evident $P>0$, avem: $P^2=2(4-\sqrt{13})<1$. **30.** 1. **31.** $m=0$. **32.** $\frac{9\sqrt{2}}{8}$. **33.** a) $11-6\sqrt{2}=(3-\sqrt{2})^2$; $51-14\sqrt{2}=(7-\sqrt{2})^2$; b) $n\in\{1,2,3,4,5\}$. **34.** Dacă n este număr par se obține valoarea 0, iar dacă n este număr impar se obține valoarea $-\sqrt{6}$. **35.** $E(-\sqrt{2})=3+6\sqrt{2}$; $E(\sqrt{2})=3-6\sqrt{2}$. **36.** $x=\sqrt{3}-\sqrt{2}$; $y=\sqrt{3}+\sqrt{2}$. **37.** $\sqrt{xy}=\frac{a^2+b^2}{2ab}$. **38.** $a=\frac{b+c}{2}\Rightarrow 2a=b+c$, $c=\sqrt{ab}\Rightarrow c^2=a\cdot b$. $2ac=(b+c)c\Rightarrow 2ac=bc+c^2\Rightarrow 2ac=bc+ab\Rightarrow b=\frac{2ac}{a+c}\Rightarrow b=\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{c}}$. **39.** $\sqrt{100-4\sqrt{n}}\in\mathbf{N}\Rightarrow 2\sqrt{25-\sqrt{n}}\in\mathbf{N}\Leftrightarrow n\in\{0,81,256,625\}$. **40.** $x=6$. **41.** $n\in\{-2,2\}$. **42.** $|x-1|+|y-2|+|z-3|=0\Leftrightarrow x=1$, $y=2$, $z=3$. **43.** $\frac{1}{12}$. **44.** Se ridică la pătrat. **46.** 98. **47.** $E(x)=\frac{x+1}{x-1}=1+\frac{2}{x-1}$, $x\in\{-1,3\}$. **48.** $\frac{3-\sqrt{5}}{6}$. **49.** $5\in\mathbf{N}$.

CAP. II. • ECUAȚII ȘI SISTEME DE ECUAȚII •

§ 1. • Ecuația de gradul I cu o necunoscută și cu două necunoscute • • Ecuații reductibile la ecuații de gradul I cu o necunoscută •

1. *a, d, f.* **3.** a) $m=1$; b) $m=-\frac{3}{2}$; c) $m=\frac{2}{3}$; d) $m=1$; e) $m=-\frac{91}{210}$; f) $m=\frac{4}{3}$; g) $m=3\sqrt{2}+4$; h) $m=44(\sqrt{3}+\sqrt{2})$; i) $m=-\frac{3}{5}$. **4.** a) $x=\frac{2}{3}$; b) $x=3+2\sqrt{2}$; c) $x\in\varnothing$; d) $x\in\mathbf{R}$; e) $x=-\frac{1}{7}$; f) $x=7$; g) $x=2$; h) $x=-\frac{3}{2}$; i) $x=1$. **5.** a) $x=45$; b) $x=1$; c) $x=5$; d) $x=\frac{1}{5}$; e) $x=-\frac{1}{2}$; f) $x=0{,}808$; g) $x=1$; h) $x=11\frac{1}{3}$; i) $x=\frac{3}{2}$. **6.** a) $m=\frac{1}{2}$; b) $m=3$; c) $m=\frac{5}{2}$; d) $m=-\frac{1}{2}$. **7.** a) 1) $m\neq 0\Rightarrow x=\frac{m-2}{m}$; 2) $m=0\Rightarrow x\in\varnothing$; b) 1) $m\neq 0$ și $m\neq 2\Rightarrow x=\frac{2}{2-m}$; 2) $m=0$ sau $m=2\Rightarrow x\in\varnothing$; c) 1) $m\neq 2$ și $m\neq 3\Rightarrow x=\frac{1}{m-3}$; 2) $m=2$ sau $m=3\Rightarrow x\in\varnothing$; d) 1) dacă $m\neq 0$ și $m\neq\frac{1}{2}\Rightarrow x=\frac{2m+1}{2m}$; 2) dacă $m=0$ sau $m=\frac{1}{2}\Rightarrow x\in\varnothing$; e) $x=\frac{m+2}{m^2+1}$, $(\forall)m\in\mathbf{R}$; f) 1) $m\neq -1\Rightarrow x=\frac{m-1}{m+1}$; 2) $m=-1\Rightarrow x\in\varnothing$; g) 1) Dacă $m\neq 0$ și $m\neq 1\Rightarrow x=2m-1$; 2) Dacă $m=0\Rightarrow x\in\mathbf{R}-\{0\}$; 3) Dacă $m=1\Rightarrow x\in\varnothing$; h) 1) $m\neq 4$ și $m\neq 1\Rightarrow x=\frac{6}{4-m}$; 2) $m\in\{4,1\}\Rightarrow x\in\varnothing$; i) Pentru $m=4\Rightarrow x=2$ singura soluție. **8.** c) 1) $a\neq 0\Rightarrow x=-2a-b$; 2) $a=0\Rightarrow x\in\mathbf{R}-\{0\}$; g) 1) $2a-b-ab\neq 0\Rightarrow x=\frac{a^2-a^2b+a-b}{2a-b-ab}$; 2) $2a-b-ab=0\Rightarrow b=\frac{2a}{a+1}$, $a\neq -1$. Dacă $a=0\Rightarrow b=0\Rightarrow x\in\mathbf{R}-\{0\}$. Dacă $a=1\Rightarrow b=1\Rightarrow x\in\mathbf{R}-\{1\}$. **9.** c) $x=-2$ și $x=3$; e) $x\in$

$\in [-2, \infty)$; f) Dacă $m < 0 \Rightarrow x \in \varnothing$, dacă $m \geq 0 \Rightarrow x = -1 \pm m$. **10.** a) (10, 4), (13, 8), (23, 19); b) $x = 1, y = 2$; c) $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{3}{2}\right), \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{3}{2}\right)$; d) (1, −2), (−2, 1), (6, 3), (3, 6), (4, 4); e) $x \in \{1, 3, 7, 21\}$ etc; g) (10, 9); f) $x = 2, y = 1$ și $x = 5, y = 1$; i) $x = 10$ și $y = 5$; h) (2, 4), (4, 2), (−2, 0), (0, −2).

§ 2. • Sisteme de ecuații •

I.1. (5, 2). **2.** (1, 2). **3.** $\left(\sqrt{3}, \sqrt{2}\right)$. **4.** (1, 1). **5.** $x \in \varnothing$. **6.** (−2, 1). **7.** (3, −1). **8.** (5, 10). **9.** (−2, 2). **10.** $\left(5\sqrt{2}, 2\sqrt{3}\right)$.

II.1. $\left(-\frac{5}{14}, \frac{27}{14}\right)$. **2.** (−5, 3). **3.** $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \sqrt{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} - \sqrt{2}\right)$. **4.** (1, 3). **5.** (7, 8). **6.** $\left(\frac{5}{2}, 1\right)$. **7.** cu $\alpha \in R$, $(\alpha, 3 - \alpha)$. **8.** $x, y \in \varnothing$. **9.** (10, 7). **10.** (5, 9).

III.1. (−1, 11). **2.** (1, 0). **3.** (1, 1). **4.** (2, 3). **5.** (1, 2). **6.** (2, −1). **7.** $x \in \varnothing$. **8.** $(x, 2 - x)$, $x \in R$. **9.** (−1, −2). **10.** (1, 3).

IV.1. a) Dacă $\frac{a+2}{1} \neq \frac{5}{a-2} \Leftrightarrow a^2 - 4 \neq 5 \Leftrightarrow a \neq \pm 3$ rezultă că sistemul are soluție unică; b) Dacă $a = 3$ rezultă că sistemul este imposibil; c) Dacă $a = -3$ sistemul are o infinitate de soluții.

V.1. $\left(-\frac{11}{5}, -\frac{11}{7}\right)$. **2.** Notăm $\frac{1}{x+y} = a$ și $\frac{1}{x-y} = b$ rezultă (5, 3). **3.** (7, 4). **4.** Notăm $\sqrt{x} = a$ și $\sqrt{y} = b$ rezultă (4, 1). **5.** (2, 3). **6.** (3, 5). **7.** (5, 8). **8.** Sistemul se scrie $\begin{cases} \frac{1}{\frac{1}{x+2} + \frac{1}{y+2}} = \frac{3}{8} \\ \frac{1}{\frac{1}{y+2} - \frac{1}{x+2}} = -\frac{3}{4} \end{cases}$.

9. Sistemul se scrie $\begin{cases} \frac{6}{x} + \frac{1}{y-3} = 5 \\ \frac{3}{x} + \frac{2}{y-3} = 1 \end{cases}$. **10.** Sistemul se scrie $\begin{cases} \frac{1}{x+3y-1} + \frac{1}{2x-y+2} = \frac{2}{3} \\ \frac{3}{x+3y-1} + \frac{2}{2x-y+2} = \frac{3}{2} \end{cases}$.

§ 3. • Probleme care se rezolvă cu ajutorul ecuațiilor de gradul I cu o necunoscută sau cu sisteme de două ecuații de gradul I cu două necunoscute •

1. $x + (x + 8) + (x - 4) = 61 \Rightarrow x = 19$. **2.** $x = 35, y = 14$. **3.** 408, 56. **4.** $\frac{27}{18} = \frac{12}{8}$. **5.** $x = 26$. **6.** 4 h și 30 min. **7.** $x = 7$ sau $x = -7$. **8.** $P = 600$. **9.** 80 km / h, 500 km. **10.** 2 și 5. **11.** 1, 3, 5 și 7. **12.** $\frac{1000}{3}$ grame și $\frac{2000}{3}$ grame. **13.** 24 și 6 ani. **14.** $x = \frac{4}{3}$ și $y = \frac{22}{3}$. **15.** $4\frac{4}{5}$, 8, 24 zile. **16.** a) 17 t; b) 9 drumuri; 6 drumuri. **17.** 360 ha. **18.** 3200 piese, 5700 piese. **19.** 100 rotații; 3 sec. **20.** 1593 m. **21.** Marți la 8; miercuri la 11. **22.** a) 1550 piese; 1200 piese; b) 310 piese; 180 piese. **23.** 19 g Ag; 6 g Cu. **24.** 40 kg. **25.** 3,07 kg; 36,93 kg. **26.** 923076. **27.** 198,62 g Au, 101,38 g Ag. **28.** 40 înv; 25 înv; 100 m. **29.** 350 km. **30.** 5 km / oră; 3 km / oră. **31.** 77 km; 332 hm. **32.** 40 piese; 10 piese; 30 piese; 20 piese. **33.** 12 ore; 24 ore. **34.** 15 cm; 20 cm. **35.** 6 cm și 8 cm. **41.** 20 hl / oră; 30 hl / oră; 15 hl /oră. **42.** 8 ani; 32 ani. **43.** 35 apartamente cu 3 camere; 4 apartamente cu 4 camere. **44.** 2 ore. **45.** 12,5; 11,5; 11 puncte. **46.** 150; 30. **47.** 7 ore. **48.** 1 robinet; 3 robinete. **50.** 15 km / h.

Scanned with OKEN Scanner

CAP. III. ◆ PATRULATERE ◆

1. 40°, 80°, 100°, 140°. **2.** Se arată că $m(\sphericalangle DNA)+m(\sphericalangle CMB)=\frac{1}{2}[m(\sphericalangle BAD)+m(\sphericalangle BCD)]$. **3.** 60°, 100°, 100°, 100° sau 60°, 100°, 40°, 160° sau 60°, 130°, 40°, 130° sau 60°, 100°, 70°, 130°. **4.** a) 60°, 80°, 100°, 120°; b) AB și CD formează cu AD unghiuri de aceeași parte a secantei, suplementare. **5.** 3 patrulatere concave: $ABOC$, $ABCO$, $AOBC$ (vezi fig. 7). **7.** a) Presupunând că ar exista un astfel de patrulater, din $m(\sphericalangle A)+m(\sphericalangle B)=90°$ și $m(\sphericalangle B)+m(\sphericalangle C)=90°$ ar rezulta $m(\sphericalangle A)+2m(\sphericalangle B)+m(\sphericalangle C)=180°$ deci $m(\sphericalangle A)+m(\sphericalangle B)+m(\sphericalangle C)<180°$ și întrucât $m(\sphericalangle D)<180°$, suma celor patru unghiuri ar fi mai mică decât 360°, ceea ce este absurd. b) Există. **8.** Patrulaterul trebuie să aibă două vârfuri situate pe d_1 și celelalte două pe d_2. Cele două vârfuri de pe dreapta d_1 se pot alege în 3 moduri. Pentru fiecare alegere a acestora, cele două vârfuri de pe d_2 se pot alege în 6 moduri: D și E; D și F, D și G, E și F, E și G, F și G. Se pot forma 18 patrulatere. **9.** 80°, 80°, 80°, 120° sau 100°, 100°, 100°, 60°. **10.** a) Dacă notăm $x=AB+BC$ și $y=AD+CD$. Cunoaștem suma și diferența dintre x și y deci x și y se pot calcula. În final obținem $AB=BC=10$ cm, $AD=CD=15$ cm. b) Fie O mijlocul diagonalei $[AC]$. Folosim proprietățile triunghiului isoscel, $BO\perp AC$ și $DO\perp AC$ deci B, O, D sunt coliniare. **11.** 36°, 108°, 108°, 108°. **12.** 12 cm. **13.** 6 cm; 4 cm. **14.** b) 72°, 108°, 72°, 108°. **16.** 90°. **17.** Notăm cu a, b, c, d lungimile laturilor, iar cu P perimetrul. Avem $a+b=c+d$ și $a+d=b+c$ de unde, ținând seama că $a+b+c+d=P$ găsim $a+b=a+d=c+d=c+b=\frac{P}{2}$ deci $a=c$ și $b=d$. Patrulaterul este paralelogram. **19.** c) 60°, 120°, 60°, 120°. **20.** $AMCN$ este paralelogram deci MN trece prin mijlocul lui $[AC]$. **21.** $[AO]$ și $[BC]$ sunt paralele și congruente, la fel $[AO]$ și $[FE]$, deci $[BC]$ este paralel și congruent cu $[FE]$ prin urmare $BCEF$ este paralelogram. Rezultă $[BF]\equiv[CE]$, etc. **25.** $[AC]$ și $[NQ]$ au același mijloc; $[AC]$ și $[MP]$ au același mijloc. Deci $[MP]$ și $[NQ]$ au același mijloc. **26.** Metodă asemănătoare celei din problema precedentă. **27.** a) 5 paralelograme. b) Un paralelogram are centrul în mijlocul lui $[MC]$, unul în mijlocul lui $[MD]$, iar trei paralelograme au centrul în mijlocul lui $[MN]$. **28.** 45 cm, 79 cm. **29.** 55 cm, 99 cm. **30.** 4. **31.** 294 cm. **32.** 1800 de plăcuțe. **33.** Folosind congruențe de triunghiuri demonstrăm că $[BF]\equiv[DH]$ și $[BD]\equiv[FH]$. **35.** Notăm cu O intersecția dreptelor CD și FE. Triunghiurile ABG, ADE și OCF sunt dreptunghice isoscele. **36.** Dacă $EFGH$ este dreptunghi, $\sphericalangle AEH$ și $\sphericalangle BFE$ sunt unghiuri cu laturile perpendiculare. *Reciproc* dacă cele patru unghiuri sunt egale, din faptul că $m(\sphericalangle BFE)+m(\sphericalangle FEB)=90°$, iar $\sphericalangle BFE\equiv\sphericalangle AEH$, rezultă $m(\sphericalangle AEH)+m(\sphericalangle FEB)=90°$, deci $m(\sphericalangle HEF)=90°$. **37.** Din faptul că $EF=AD$ rezultă $\frac{1}{2}EF=\frac{1}{2}AD$, adică $EO=MD$, unde am notat cu O intersecția diagonalelor, iar cu M mijlocul lui $[AD]$. Rezultă $\Delta OED\equiv\Delta DMO$, deci $\sphericalangle ADO\equiv\sphericalangle ODA$. **38.** $m(\sphericalangle A)=m(\sphericalangle C)=120°$, iar $m(\sphericalangle B)=m(\sphericalangle D)=60°$. **40.** Demonstrați că diagonalele " se înjumătățesc" și sunt perpendiculare. **41.** Demonstrați că diagonalele "se înjumătățesc" și sunt congruente. **42.** Este ușor de arătat că $BCEF$ este paralelogram. Pentru a fi dreptunghi este necesar și suficient ca $BC\perp BF$ deci $AD\perp BF$. Deoarece triunghiul BAF este isoscel, AD este înălțime dacă și numai dacă este bisectoare. **43.** Notăm lungimile laturilor cu a, b, c, d, iar perimetrul cu P; $a=\frac{b+c+d}{3}=\frac{P-a}{3}$, de unde $a=\frac{P}{4}$. Analog se arată că $b=c=d=\frac{P}{4}$. **46.** $\Delta EAB\equiv\Delta FCB$ deci $\sphericalangle EBA\equiv\sphericalangle FBC$. ΔEBF este isoscel deci EF este perpendiculară pe bisectoarea unghiului EBF care este aceeași cu bisectoarea unghiului ABC. $EF\perp BD$ deci $EF\parallel AC$ etc. **47.** a) Fiecare romb are două unghiuri de măsură 60° și două unghiuri de măsură 120°. **48.** 45 cm. **49.** $m(\sphericalangle OCF)=m(\sphericalangle CBD)=45°$. Triunghiul OCF este dreptunghic isoscel. Folosind aceasta, arătăm că perimetrul dreptunghiului $AEFG$ este egal cu perimetrul pătratului $ABCD$. Latura pătratului este de 25 cm. **52.** a) 75°; b) Se arată

Scanned with OKEN Scanner

că ΔAQP este echilateral, apoi că $\Delta AQO \equiv \Delta APO$, deci $[AO$ este bisectoarea unghiului BAC. **58.** $m(\sphericalangle A) = 70°$, $m(\sphericalangle B) = 80°$, $m(\sphericalangle C) = 100°$ și $m(\sphericalangle D) = 110°$. **59.** 43 cm. **60.** 55 cm. **61.** 15 cm. **62.** $m(\sphericalangle A) = m(\sphericalangle B) = 30°$, $m(\sphericalangle C) = m(\sphericalangle D) = 150°$. **63.** Luăm punctele C și D așa încât $[OC] \equiv [OB]$, $[OD] \equiv [OA]$. **64.** $ABCD$ fiind trapez isoscel rezultă $[OA] \equiv [OD]$ și $[OB] \equiv [OC]$. $CDEF$ fiind trapez isoscel rezultă $[OC] \equiv [OF]$ și $[OD] \equiv [OE]$. Deci ΔOAE și ΔOBF sunt isoscele și având un unghi comun $m(\sphericalangle OAE) = m(\sphericalangle OEA) = m(\sphericalangle OBF) = m(\sphericalangle OFB)$ deci $BF \parallel AE$ și trapezul $ABFE$ este isoscel. **66.** Demonstrăm că triunghiurile ADE și BCE sunt isoscele și deducem că $AD + BC = CD$. Obținem $CD = 18$ cm și $AB = 24$ cm. **67.** a) Notăm cu M mijlocul lui $[AB]$, segmentele $[AM]$ și $[CD]$ sunt paralele și congruente deci $AMCD$ este paralelogram, dar $[AM] \equiv [AD]$ deci $AMCD$ este romb și analog $BCDM$ este romb; deci $[DM] \equiv [BC] \equiv [AD] \equiv [AM]$ de unde rezultă că triunghiul AMD este echilateral, $m(\sphericalangle A) = 60°$. c) În ΔADC avem $[AD] \equiv [DC]$ și $m(\sphericalangle D) = 120°$ de unde putem afla $m(\sphericalangle OCD)$. Găsim $m(\sphericalangle AOB) = 120°$. **68.** Demonstrăm că $AB = 2\,CD$. Folosind apoi faptul că $[MN]$ este linie mijlocie rezultă că $[MN]$ și $[DC]$ sunt congruente și paralele, prin urmare $CDMN$ este paralelogram. Arătăm apoi că diagonalele sale sunt congruente. **69.** a) Pătrat. b) Linia mijlocie a trapezului reprezintă o diagonală a pătratului, iar înălțimea trapezului este congruentă cu cealaltă diagonală. **72.** a), c), d), e), g), h) sunt adevărate, iar b) și f) sunt false. **74.** Pătrat, paralelogram sau trapez dreptunghic. **75.** a) Nu. b) Patrulater convex. c) Calculăm măsurile unghiurilor ABD, ADB, apoi CBD și CDB. Arătăm că $[AC$ este bisectoare în triunghiul isoscel ABD deci rezultă $AC \perp BD$. **77.** a) Paralelogram; b) paralelogram; c) romb; d) paralelogram; e) romb; f) dreptunghi; g) pătrat. **78.** a) Perpendiculare; b) congruente; c) perpendiculare și congruente. **79.** Demonstrăm că $\Delta ABC \equiv \Delta AEC$; $[AC$ este bisectoare în triunghiul isoscel EAB deci $AC \perp EB$. **80.** b) Când M este mijlocul lui $[BC]$. **81.** $AMND$ este paralelogram iar $MQNP$ este dreptunghi deci $[PQ] \equiv [MN] \equiv [AD]$. **82.** a), b) Se arată că $BMAN$ și $CMAP$ sunt paralelograme de unde rezultă că și $BNCP$ este paralelogram. c) $[BP] \equiv [CN]$ dacă și numai dacă $BNPC$ este dreptunghi adică $BC \perp BN$; dar $BN \parallel AM$. **84.** $BCDM$ are diagonalele congruente deci este trapez isoscel; rezultă $[MD] \equiv [BC] \equiv [AD]$. Perimetrul triunghiului AMD este egal cu $AD + AB$ de unde rezultă $DM = MB = \frac{AB}{2}$; prin urmare $AD \perp BD$.

CAP. IV. • SEGMENTE PROPORȚIONALE • • ASEMĂNAREA TRIUNGHIURILOR •

1. $\frac{AM}{2} = \frac{MN}{3} = \frac{NB}{4}$, $\frac{2PM}{2} = \frac{MN}{3} = \frac{2NQ}{4}$, $\frac{PM}{1} = \frac{MN}{3} = \frac{NQ}{2} = \frac{PM + MN + NQ}{6} = \frac{PQ}{6} = \frac{5,4}{6} = 0,9$. Deci $PM = 0,9$ cm; $MN = 2,7$cm; $NQ = 1,8$ cm; $AB = 8,1$ cm. **2.** a) $\frac{AM}{24} = \frac{5}{6}$, deci $AM = 20$ cm; b) $\frac{MB}{AB} = \frac{1}{6}$; $\frac{NM}{MB} = \frac{5}{2}$. **4.** a) $M \in [AB]$ și $AM = 6$ cm. b) $N \in AB$, B este între A și N astfel încât $NB = 20$ cm. **5.** $MA = 20$ cm, este între A și N, $NB = 144$ cm, $OB = 18$ cm, $OM = 2$ cm, $ON = 162$ cm, $AN = 180$ cm, $AN = 180$ cm; relațiile se verifică imediat. **8.** $AC = 8 \cdot 4 = 32$ cm. Perimetrul este egal cu 120 cm. **9.** $[MN]$ linie mijlocie; avem $\frac{AM}{MB} = \frac{AP}{PQ} = \frac{AN}{NC}$ deci $[AP] \equiv [PQ]$. **10.** AB; EF; CD sunt paralele echidistante. Conform teoremei paralelelor echidistante rezultă $MN = NP$. **11.** $MNN'M'$, $NPP'N'$, $PQQ'P'$ sunt paralelograme. $M'N'N''M''$, $M'P'P''M''$, $P'Q'Q''P''$ sunt paralelograme. **12.** EG este linie mijlocie în trapezul $ABHF$, iar FH este linie mijlocie în trapezul $EGCD$; avem $EG = \frac{AB + FH}{2}$ și $FH = \frac{CD + EG}{2}$ și adunând aceste relații se obține relația din enunț. **13.** $\frac{AM}{AB} =$

Scanned with OKEN Scanner

$= \frac{AN}{AC}$, $\frac{3}{12} = \frac{AN}{16}$ deci $AN = 4$ cm. $\frac{AN}{AC} = \frac{BQ}{BC}$; $\frac{4}{16} = \frac{BQ}{24}$, deci $BQ = 6$ cm; $MN = BQ = PC = 6$ cm, deci $PQ = 12$ cm; $NQ = MB = 8$ cm; $MP = NQ = 12$ cm. **15.** a) $\frac{AP}{PM} = \frac{BD}{DM} = \frac{CE}{EM} \Rightarrow \frac{BD + DM}{DM} =$ $= \frac{CE + EM}{EM} \Rightarrow \frac{BM}{DM} = \frac{CE}{EM} \Rightarrow DM = EM$; b) $\frac{AP}{PM} = 2 = \frac{BD}{DM} \Rightarrow BD = 2DM$ analog $CE =$ $= 2EM \Rightarrow BD = DE = CE$. **16.** a) Din $C'C_1$ linie mijlocie rezultă $BC_1 = C_1A' \Rightarrow BA' = 2C_1A'$; analog $B_1C = A'B_1 \Rightarrow A'C = 2A'B_1$; $BA' = A'C \Rightarrow A'C_1 = A'B_1$; b) $B'A'C'A$ paralelogram rezultă $B'M = MC'$. **17.** a) $\frac{AF}{AB} = \frac{MD}{BM} = \frac{MD}{MC} = \frac{AE}{AC}$; $\Delta CDE \sim \Delta CMA \Rightarrow \frac{DE}{AM} = \frac{DC}{CM}$; $\Delta BAM \sim \Delta BFD \Rightarrow \frac{DF}{AM} = \frac{DB}{MB}$; b) $\frac{DE}{AM} = \frac{DC}{CM} \Rightarrow DE = \frac{AM \cdot DC}{CM}$; $\frac{DF}{AM} = \frac{BD}{BM} \Rightarrow DF =$ $= \frac{AM \cdot BD}{BM}$; $DE + DF = \frac{AM \cdot DC + AM \cdot BD}{BM} = \frac{AM(BD + DC)}{BM} = \frac{AM \cdot BC}{BM} = \frac{AM \cdot 2BM}{BM} =$ $= 2AM$. **18.** $\frac{MN}{AC} = \frac{MB}{AB}$; $\frac{NP}{BD} = \frac{CN}{BC} = \frac{AM}{AB} \Rightarrow \frac{MN}{AC} + \frac{NP}{BD} = \frac{MB}{AB} + \frac{AM}{AB} = 1$. **19.** În triunghiul ABM, $PN \parallel BM$; aplicând teorema fundamentală a asemănării avem: $\frac{AP}{AB} = \frac{AN}{AM} = \frac{PN}{BM}$, (1). Aceeași teoremă aplicată în triunghiul AMC conduce la: $\frac{AN}{AM} = \frac{AQ}{AC} = \frac{NQ}{MC}$, (2). Din (1) și (2) rezultă, $\frac{PN}{BM} = \frac{NQ}{MC}$; dar $BM = MC$ și prin urmare $PN = NQ$. **20.** Fie $\{M\} = AO \cap BC$. Teorema fundamentală aplicată în ΔABM conduce la $\frac{AP}{AB} = \frac{PO}{BM}$, (1). Aceeași teoremă aplicată în ΔACM conduce la $\frac{AQ}{AC} = \frac{OQ}{MC}$, (2). Teorema lui *Thales* aplicată în triunghiul ABC conduce la $\frac{AP}{AB} = \frac{AQ}{AC}$, (3). Din (1), (2), (3) avem $\frac{PO}{BM} = \frac{OQ}{MC} \Rightarrow BM = MC$. **21.** În triunghiul DBC, DE este mediană; $NQ \parallel BC \Rightarrow [NM] \equiv$ $\equiv [MQ]$, (1). În ΔABD, $PN \parallel AD$, aplicând teorema fundamentală a asemănării avem $\frac{BP}{BA} = \frac{PN}{AD}$, (2); în ΔACD, $MQ \parallel AD \Rightarrow \frac{CQ}{CD} = \frac{MQ}{AD}$, (3); $\left.\begin{array}{l} AD \parallel PQ \parallel BC \\ AB, CD \text{ secante} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{BP}{BA} = \frac{CQ}{CD}$, (4). Relațiile (2), (3), (4) conduc la $\frac{PN}{AD} = \frac{MQ}{AD}$; deci $[PN] \equiv [MQ]$, (5). Din (1) și (5) rezultă $[PN] \equiv [NM] \equiv [MQ]$. **22.** $\Delta DMO \sim \Delta ABC$ și $\Delta CNO \sim \Delta CBA$. Obținem: $\frac{MO}{AB} = \frac{DM}{DA}$, (1) și $\frac{NO}{AB} = \frac{CN}{CB}$, (2). Dar $\frac{DM}{DA} =$ $= \frac{CN}{CB}$, (3). Din (1), (2) și (3) se obține $MP = NO$. **23.** În ΔBEN, $AD \parallel EN \Rightarrow \frac{BA}{BE} = \frac{AD}{EN}$. (1). În ΔCEM, $AD \parallel EM \Rightarrow \frac{CD}{CE} = \frac{AD}{ME}$, (2). În ΔEBC, $AD \parallel BC \Rightarrow \frac{BA}{BE} = \frac{CD}{CE}$ (3). Relațiile (1), (2) și (3) implică $\frac{AD}{EN} = \frac{AD}{ME} \Rightarrow EM = EN$. **24.** Fie $ABCD$ trapezul dat $AB \parallel CD$, $AB > CD$; notăm $AD \cap BC =$ $= \{P\}$, M mijlocul lui $[AB]$, N mijlocul lui $[CD]$, $\{O\} = AC \cap BD$. În triunghiul PAB, PM este mediană, $CD \parallel AB \Rightarrow N \in PM$, deci P, N, M coliniare (vezi problema 20). Ducem prin O, $EF \parallel AB$, $E \in (AD)$, $F \in$ $\in (BC)$; conform problemei 22, avem $OE = OF$ și ținând seama de problema 20 obținem $O \in PM$. **25.** Teorema lui *Thales* implică $\frac{AO}{OE} = \frac{DO}{OB}$, (1) și $\frac{OC}{AO} = \frac{OB}{FO}$, (2). Din (1) și (2) rezultă $\frac{OC}{OE} = \frac{DO}{FO}$ și cu reciproca teoremei lui *Thales* obținem $EP \parallel CD$. **26.** $\frac{AB}{AB'} = \frac{AC}{AC'}$; cu ajutorul reciprocei teoremei lui *Thales* obținem $B'C' \parallel BC$. **27.** Vom avea $AD + AE = DB + EC + BC$ sau $AD + AE = 5 - AD + 7 - AE + 6$, de unde obținem: $AD + AE = 9$; din teorema fundamentală a asemănării avem: $\frac{AD}{5} = \frac{AE}{7} = \frac{DE}{6}$. Din

Scanned with OKEN Scanner

$\frac{AD}{5}=\frac{AE}{7}=\frac{AD+AE}{5+7}=\frac{9}{12}=\frac{3}{4}$ și $\frac{DE}{6}=\frac{3}{4}$ obținem $DE=4{,}5$ cm. **28.** $AC\parallel BD\Rightarrow \frac{OB}{OA}=\frac{OD}{OC}$, (1); $BC\parallel DE\Rightarrow \frac{OB}{OE}=\frac{OC}{OD}$, (2). Prin înmulțirea relațiilor (1) și (2) se obține $OB^2=OA\cdot OE$. **29.** "$\Rightarrow$" $BP\perp AQ\Rightarrow \frac{AP}{AD}=\frac{QC}{DC}\cdot BP$ înălțime în triunghiul ABQ, AD înălțime în același triunghi, rezultă QM înălțime în triunghiul ABQ, deci $QM\perp AB$. $CA\perp AB$, $QP\perp AB$ implică $QP\parallel AC$; din teorema lui *Thales* $\Rightarrow \frac{AP}{AD}=\frac{QC}{DC}$. "$\Leftarrow$" $\frac{AP}{AD}=\frac{QC}{DC}\Rightarrow BP\perp AQ$. Relația $\frac{AP}{AD}=\frac{QC}{DC}$ cu reciproca teoremei lui *Thales* implică $QP\parallel AC$. Dar $AC\perp AB$; obținem $QP\perp AB$. Deci QP înălțime în triunghiul ABQ, AD înălțime în același triunghi; $AD\cap QP=\{P\}\Rightarrow BP$ înălțime $\Rightarrow BP\perp AQ$. **30.** $FB\parallel AD\Rightarrow$ $\Rightarrow \frac{EA}{EF}=\frac{DE}{EB}$, (1); $DG\parallel AB\Rightarrow \frac{EA}{EG}=\frac{EB}{DE}$, (2). Relațiile (1) și (2) prin înmulțire conduc la relația din enunț. **31.** a) $\sphericalangle AFE\equiv\sphericalangle BAM$; $\sphericalangle AEF\equiv\sphericalangle CED$; $\sphericalangle B\equiv\sphericalangle C\Rightarrow 90^\circ-m(\sphericalangle B)=90^\circ-m(\sphericalangle C)\Rightarrow\sphericalangle BAM\equiv$ $\equiv\sphericalangle CED\Rightarrow\sphericalangle AFE\equiv\sphericalangle AEF\Rightarrow AE=AF$; b) $\frac{AE}{DM}=\frac{AC}{MC}=\frac{2AC}{BC}=\frac{2AB}{BC}\Rightarrow AE\cdot BC=2AB\cdot DM$. **32.** Ducem prin B și C paralele la CP și BQ care se intersectează în R. $NQ\parallel RC\Rightarrow \frac{AN}{AR}=\frac{NQ}{CR}$; $PN\parallel$ $\parallel BR\Rightarrow \frac{PN}{BR}=\frac{AN}{AR}\Rightarrow \frac{NQ}{CR}=\frac{PN}{BR}$; $BNCR$ paralelogram rezultă $CR=BN$; $BR=NC\Rightarrow \frac{NQ}{BN}=$ $=\frac{PN}{NC}\Rightarrow PQ\parallel BC$. **33.** Ducem $CD\parallel AM$, $D\in(BA$, în triunghiul BCD; CA și BE vor fi mediane deci $\frac{AP}{PC}=\frac{1}{2}$ (deoarece P va fi centrul de greutate). *Altă soluție.* Ducem $MQ\parallel BP$, $Q\in(AC)\Rightarrow AP=PQ$, MQ este linie mijlocie în triunghiul CBP, deci $PQ=QC$. **34.** Din teorema bisectoarei în triunghiul ABD rezultă $\frac{AD}{AB}=\frac{DM}{BM}$, (1). Aceeași teoremă în triunghiul ADC conduce la $\frac{DA}{DC}=\frac{AN}{NC}$, (2). Dar $AB=$ $=DC\Rightarrow \frac{DM}{BM}=\frac{AN}{NC}$, (3). Din (3) rezultă $\frac{DM+BM}{BM}=\frac{AN+NC}{NC}\Rightarrow \frac{BD}{BM}=\frac{AC}{NC}$, (4). Dar $AC=$ $=2\cdot OC$, $BD=2\cdot BO$ și atunci din (4) obținem $\frac{BO}{BM}=\frac{OC}{NC}$ relație care cu ajutorul reciprocei teoremei lui *Thales* conduce la $MN\parallel BC$. **35.** Se aplică teorema bisectoarei. Se obține $BC=10$ cm. **36.** Se aplică teorema bisectoarei în triunghiurile AMB și AMC și apoi se aplică reciproca teoremei lui *Thales*. **37.** $EF=\frac{ab}{a+b}$ **38.** $\frac{OM}{BC}=\frac{ON}{AD}$; $OM\parallel BC\Rightarrow \frac{OM}{BC}=\frac{AO}{AC}$, (1); $ON\parallel AD\Rightarrow \frac{ON}{AD}=\frac{CO}{AC}$, (2). Din (1) și (2) rezultă $AO=CO$. $\Delta AOB\equiv\Delta COD\Rightarrow AB\equiv CD$, dar $AB\parallel CD$ prin urmare $ABCD$ este paralelogram. **39.** Fie N mijlocul segmentului $[AC]$; $MN=\frac{AB-CD}{2}$ și $MN\parallel AB$. Ducem $CF\perp AB$, $F\in(AB)$, $AE=\frac{AB-CD}{2}$, $AE=MN$ și $AE\parallel MN$ conduc la concluzia: $AEMN$ paralelogram deci, $ME\parallel AC$. **40.** Fie (AD bisectoarea unghiului $\sphericalangle BAC$, $D\in(BC)$. Ducem $MM'\parallel AD$ și $NN'\parallel AD$, $M'\in$ $\in(BC)$, $N'\in(BC)$. Avem: $\frac{BM}{BA}=\frac{BM'}{BD}$; $\frac{CN}{CA}=\frac{CN'}{CD}$. Ținând seama de teorema bisectoarei: $\frac{BM}{BA}\cdot\frac{AC}{CN}=\frac{BM'}{BD}\cdot\frac{CD}{CN'}\Rightarrow BM'=CN'$; Q fiind mijlocul lui $[BC]\Rightarrow[M'Q]\equiv[N'Q]$ deci în trapezul $MM'NN'$, PQ este linie mijlocie și având $MM'\parallel AD\Rightarrow PQ\parallel AD$. **41.** Teorema bisectoarei aplicată în triunghiurile ABC și CAD conduce la: $\frac{AF}{ED}=\frac{AB}{BD}$, (1) și $\frac{CF}{FD}=\frac{AC}{AD}$, (2). Din (1) și (2) ținând seama de $AB=AC$ și $AD=BD$ și de reciproca teoremei lui *Thales* obținem: $EF\parallel AC$. **42.** Ducem $CD\parallel OA$, $D\in$ $\in(OB)\Rightarrow \frac{CD}{OA}=\frac{DB}{OB}=\frac{OB-OD}{OB}=\frac{OB-OC}{OB}\Rightarrow \frac{OC}{OA}=\frac{OB-OC}{OB}\Rightarrow OB\cdot OC=OA\cdot OB-$ $-OA\cdot OC\Rightarrow OA\cdot OB=OB\cdot OC+OA\cdot OC\Rightarrow \frac{1}{OC}=\frac{1}{OA}+\frac{1}{OB}$. **43.** $\Delta ABC\sim\Delta BDC\Rightarrow$

Scanned with OKEN Scanner

$\Rightarrow BC = 12$; $\frac{BD}{BA} = \frac{3}{4}$. **44.** $\Delta ABD \sim \Delta ACB \Rightarrow AD = 1$ cm. **45.** $\Delta ADB \sim \Delta CAB \Rightarrow \frac{AD}{AC} = \frac{AC}{BC}$. **46.** $\Delta HA'B \sim \Delta HB'A \Rightarrow \frac{HB}{HA} = \frac{HA'}{HB'}$, (1); $\Delta HA'C \sim \Delta HC'A \Rightarrow \frac{HC}{HA} = \frac{HA'}{HC'}$, (2). Din (1) și (2) obținem relația din enunț. **47.** Dacă triunghiul dat este ABC, iar M, N, P sunt respectiv mijloacele laturilor $[BC]$, $[AC]$, $[AB]$ atunci $[PN]$, $[PM]$, $[MN]$ sunt linii mijlocii și avem: $\frac{PN}{BC} = \frac{PM}{AC} = \frac{MN}{AB} = \frac{1}{2}$, deci triunghiurile MNP și ABC sunt asemenea. **48.** $\frac{AB^2}{A'B'^2} = \frac{AD^2}{A'D'^2} \Rightarrow \frac{AB^2 - AD^2}{A'B'^2 - A'D'^2} = \frac{AB^2}{A'B'^2} \Rightarrow \frac{BD^2}{B'D'^2} = \frac{AB^2}{A'B'^2}$ deci $\frac{BD}{B'D'} = \frac{AB}{A'B'}$, obținem că $\Delta ABD \sim \Delta A'B'D'$ deci $\sphericalangle B \equiv \sphericalangle B'$. Analog $\Delta ADC \sim \Delta A'D'C' \Rightarrow \sphericalangle C \equiv \sphericalangle C'$ și va rezulta că $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$. **49.** $\Delta CND \sim \Delta MBD \Rightarrow BC = 12$ cm. **50.** $\sphericalangle B \equiv \sphericalangle E$; $\sphericalangle C \equiv \sphericalangle F$ deci $\Delta ABC \sim \Delta DEF$. **51.** $\frac{BD}{BA} = \frac{DE}{AC}$. Notând $AD = x$ avem: $\frac{14 - x}{14} = \frac{x}{10} \Leftrightarrow x = \frac{35}{6}$; $\frac{BD}{14} = \frac{BE}{12} \Leftrightarrow BE = 7$ cm. **52.** Relația dată se mai scrie $\frac{B'A}{A'D} = \frac{BC}{AC}$. Avem: $\Delta BB'C \sim \Delta AA'C \Rightarrow \frac{BC}{AC} = \frac{BB'}{AA'}$. Obținem $\frac{B'A}{A'D} = \frac{BB'}{AA'} \Rightarrow \Delta AB'B \sim \Delta DA'A \Rightarrow \sphericalangle BAC \equiv \sphericalangle ADB$. **53.** $\frac{BC}{B'C'} = \frac{BE}{B'E'} \Rightarrow \Delta BCE \sim \Delta B'C'E'$ (vezi problema 48.) De aici obținem: $\sphericalangle C \equiv \sphericalangle C'$. $\frac{BC}{B'C'} = \frac{CF}{C'F'} \Rightarrow \Delta BCF \sim \Delta B'C'F' \Rightarrow \sphericalangle B \equiv \sphericalangle B'$. **54.** $\Delta CBA \sim \Delta CAD \Rightarrow \frac{AC}{CD} = \frac{BC}{AC}$. **55.** Se arată că: $\Delta AEF \sim \Delta ACB$. **56.** Fie $\{F\} = EO \cap CD$; $EF \parallel BC \Rightarrow \frac{CF}{FD} = \frac{BE}{EA} = \frac{CO}{OA} = \frac{OB}{OD}$, $\frac{OB}{OD} = \frac{OC}{OA}$; $\sphericalangle O$ comun $\Delta AOD \sim \Delta COB \Rightarrow \frac{OB}{OD} = \frac{BC}{AD}$; $\frac{BE}{EA} = \frac{BC}{AD}$ și $\sphericalangle B = \sphericalangle A \Rightarrow \Delta BCE \sim \Delta EAD \Rightarrow \sphericalangle EBC \equiv \sphericalangle ADE$. Având și $\sphericalangle BCE \equiv \sphericalangle CEF$ (alterne interne) și $\sphericalangle ADE \equiv \sphericalangle FED$ (alterne interne), obținem $\sphericalangle CEF \equiv \sphericalangle DEF$. **57.** Fie $AA' \perp BC$, $A' \in (BC)$, $BB' \perp AC$, $B' \in AC$, $CC' \perp AB$, $C' \in (AB)$. $\Delta CED \sim \Delta CBB' \Rightarrow \frac{DE}{BB'} = \frac{CD}{CB} = \frac{CE}{CB'}$, (1) $\Delta EAF \sim \Delta CAC' \Rightarrow \frac{EF}{CC'} = \frac{AE}{AC} = \frac{AF}{AC'}$, (2). Din (1) și (2) se obține $AB \cdot CD \cdot EF = BC \cdot DE \cdot AE$. **58.** a) $m(\sphericalangle A) = 60° = m(\sphericalangle ADC)$. $m(\sphericalangle DAC) = m(\sphericalangle B) - 45°$, deci $\Delta ADC \sim \Delta BAC$. b) Din asemănarea precedentă rezultă: $\frac{AD}{AB} = \frac{AC}{BC}$, însă $m(\sphericalangle AED) = 90°$ și $m(\sphericalangle DAE) = 30°$, deci $2DE = AD$. **59.** Rezultă: $\frac{BC^2}{B'C'^2} = \frac{AB^2}{A'B'^2} \Rightarrow \frac{AB^2 + AC^2}{A'B'^2 + A'C'^2} = \frac{AB^2}{A'B'^2} = \frac{AB^2 + AC^2 - AB^2}{A'B'^2 + A'C'^2 - A'B'^2} = \frac{AC^2}{A'C'^2} \Rightarrow \frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'} \Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$. **60.** Avem: $\sphericalangle BDA \equiv \sphericalangle ADC \Rightarrow m(\sphericalangle BDA) = m(\sphericalangle ADC) = 90°$. Dar $\Delta DBA \sim \Delta ABC \Rightarrow \sphericalangle BDA \equiv \sphericalangle BAC \Rightarrow m(\sphericalangle BAC) = 90°$. **61.** Fie ΔABC și $\Delta A'B'C'$ de înălțimi $AD = h$ și $A'D' = h'$. Ducem medianele AM, $A'M'$ de lungimi m și m' rezultă $\frac{h}{BC} = \frac{h}{B'C'} \Rightarrow \frac{h}{2m} = \frac{h}{2m'} \Rightarrow \frac{h}{m} = \frac{h}{m'} \Rightarrow \Delta ADM \sim \Delta A'D'M' \Rightarrow \sphericalangle AMD \equiv \sphericalangle A'M'D' \Rightarrow \sphericalangle C \equiv \sphericalangle C' \Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$. **62.** $\Delta APQ \sim \Delta CBQ \Rightarrow \frac{AQ}{CQ} = \frac{AP}{BC} = \frac{1}{n}$.

CAP. V. • RELAȚII METRICE •

1. $EF = 14$ cm. **2.** $96\sqrt{2}$ cm. **3.** $BC = 10$ cm, $AD = 4{,}8$ cm, $AC = 6$ cm, $AB = 8$ cm. **4.**

Scanned with OKEN Scanner

$m(\sphericalangle AOD)=60°$ și $[AO]\equiv[OD]\Rightarrow \Delta AOD$ este echilateral $\Rightarrow AD=4$ cm. etc. **5.** $m(\sphericalangle DAC)=$ $=90°\Rightarrow AC=a\sqrt{3}$, $BD=a\sqrt{7}$. **6.** $AB^2=AD^2+BD^2$ și $AC^2=AD^2+DC^2\Rightarrow AB^2-$ $-AC^2=BD^2-DC^2\Leftrightarrow AB^2-AC^2=BC(BD-DC)$. **7.** $5;2\sqrt{3};\sqrt{73}$. **8.** $BC=10$ cm. Conform teoremei bisectoarei avem: $\frac{DB}{DA}=\frac{BC}{AC}\Leftrightarrow\frac{DB+DA}{DA}=\frac{BC+AC}{AC}\Leftrightarrow\frac{6}{DA}=\frac{18}{8}\Rightarrow DA=\frac{8}{3}\Rightarrow DC=$ $=\frac{8\sqrt{10}}{3}$; $BE=3\sqrt{5}$. **9.** $BB'=\frac{2a\sqrt{3}}{3}$; $CC'=\frac{2a\sqrt{3\left(2+\sqrt{3}\right)}}{2+\sqrt{3}}$; $\frac{A'C}{A'B}=\frac{a\sqrt{3}}{a}\Rightarrow\frac{A'C}{BC}=$ $=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}\Rightarrow A'C=\frac{2a\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}=\frac{2a\sqrt{3}\left(\sqrt{3}-1\right)}{2}=a\sqrt{3}\left(\sqrt{3}-1\right)$. $\Delta CA'D\sim\Delta CBA\Rightarrow$ $\Rightarrow\frac{A'D}{AB}=\frac{CA'}{BC}\Rightarrow A'D=\frac{a\sqrt{3}\left(\sqrt{3}-1\right)}{2}=AD\Rightarrow AA'=\frac{a\sqrt{6}\left(\sqrt{3}-1\right)}{2}$. **10.** $\Delta BDE\sim$ $\sim\Delta BAC\Rightarrow\frac{DE}{AC}=\frac{BD}{AB}\Rightarrow DE=\frac{3\sqrt{5}}{2}$; $CE=\sqrt{CD^2+DE^2}=\frac{15}{2}$. **11.** $CD=CO-OD=18$ cm; $BD=CO+OD=32$ cm; $AC^2=CD\cdot CB\Rightarrow AC=30$ cm; $AB^2=BD\cdot BC\Rightarrow AB=40$ cm. **12.** $\sin O=\frac{AD}{AO}\Rightarrow AO=2\Rightarrow BC=4$, $AB=2\sqrt{3}$ $AC=2$. **13.** $MN=\frac{AB-DC}{2}$. Fie $CE\perp AB$; $EB=\frac{AB-DC}{2}=6$ cm. $BC^2=BE\cdot BA\Rightarrow AB=\frac{75}{2}$; $DC=AB-2BE=\frac{51}{2}\cdot P_{ABCD}=93$ cm. **14.** $10^2=5^2+\left(5\sqrt{3}\right)^2\Rightarrow m(\sphericalangle B)=90°$. **15.** $AA'=\frac{CD-AB}{2}\Rightarrow AA'=DA'\Rightarrow m(\sphericalangle D)=$ $=45°\Rightarrow\Delta MAB$ este dreptunghic isoscel $\Rightarrow MB=\sqrt{2}$. **16.** $BC^2>AB^2+AC^2\Rightarrow m(\sphericalangle A)>$ $>90°\Rightarrow A$ este între D și C. **17.** Reciproca teoremei catetei. **18.** Fie $\{G\}=AA'\cap BB'$; $GA=4$, $GB'=3$, $AB'=5\Rightarrow m(\sphericalangle AGB')=90°\Rightarrow AB=2\sqrt{13}$. **19.** Pătratul se poate împărți în patru pătrate cu latura 1 cm și diagonala $\sqrt{2}$ cm. Deci numărul minim de puncte este 5. **20.** Notăm: $BE=x$ și $DF=$ $=y$; $\Delta ABE\sim\Delta FDA\Rightarrow xy=a^2$. $EF=\sqrt{(x+a)^2+(y+a)^2}\geq\sqrt{2(x+a)(y+a)}=$ $=\sqrt{2\left[2a^2+a(x+y)\right]}\geq\sqrt{2\left[2a^2+a\cdot2\sqrt{xy}\right]}=2a\sqrt{2}$. Deci valoarea minimă este $2a\sqrt{2}$ și se obține când $x=y=a$. **21.** $\frac{\sqrt{5}}{3}<\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow\cos B<\cos 30°\Rightarrow m(\sphericalangle B)>30°$. **22.** $AM=\sqrt{a^2-b^2}$. Fie $CE\perp AB$; $\Delta CEB\sim\Delta AMB\Rightarrow\frac{CE}{AM}=\frac{CB}{AB}\Rightarrow CE=\frac{2b\sqrt{a^2-b^2}}{a}\Rightarrow AD=\frac{2b\sqrt{a^2-b^2}}{a}$, $EB=\frac{2b^2}{a}\Rightarrow DC=AE=\frac{a^2-2b^2}{a}$. **23.** Fie $AC\cap BD=\{O\}$; $AB^2+CD^2=$ $=AO^2+BO^2+CO^2+DO^2=AD^2+BC^2=169\Rightarrow\sqrt{AB^2+CD^2}=13$. **26.** $AD=\frac{AB\cdot AC}{BC}\Rightarrow$ $\Rightarrow\frac{1}{AD^2}=\frac{BC^2}{AB^2AC^2}=\frac{AB^2+AC^2}{AB^2\cdot AC^2}=\frac{1}{AB^2}+\frac{1}{AC^2}$. **27.** $h_a=4$ cm, $BC=8\sqrt{3}$ m $\Rightarrow$ $\Rightarrow h_b\cdot AC=h_a\cdot BC\Rightarrow h_b=4\sqrt{3}$ m. **29.** $\frac{32\sqrt{3}}{9}$. **31.** Fie a lungimea laturii opuse unghiului de măsură 30°. Celelalte laturi vor fi $2a$ și $a\sqrt{3}\Rightarrow a\left(3+\sqrt{3}\right)=18\left(\sqrt{3}+1\right)\Rightarrow a=6\sqrt{3}$. **34.** Relația din enunț este echivalentă cu: $\sqrt{a-10}+(b-5)^2+\left|c-5\sqrt{3}\right|=0\Rightarrow a=10$, $b=5$,

Scanned with OKEN Scanner

$c = 5\sqrt{3} \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow m(\sphericalangle A) = 90°, m(\sphericalangle B) = 30°, m(\sphericalangle C) = 60°$. **36.** Fie $DE \perp AB$, $AF \perp DB$, $DE \cdot AB = AF \cdot DB \Rightarrow AF = \frac{24}{5}$, $DF = \sqrt{AD^2 - AF^2} = \frac{7}{5}$. $AC = 3\sqrt{17}$ cm. **37.** MP este linie mijlocie în $\Delta ADC \Rightarrow DC = 4$ cm, $PQ = \frac{AB - DC}{2} \Rightarrow AB = 10$ cm. Fie $CE \perp AB$, $CE = \sqrt{BC^2 - BE^2} = 4$ cm. $AC = \sqrt{AE^2 + CE^2} = \sqrt{65}$ cm. $\Delta AOB \sim \Delta DOC \Rightarrow \frac{AO}{OC} = \frac{AB}{CD} \Rightarrow \frac{AO}{AC} = \frac{AB}{AB + CD} \Rightarrow AO = \frac{5\sqrt{65}}{7}$. $P_{AOB} = \frac{10\left(\sqrt{65} + 7\right)}{7}$ cm. **40.** $AB = 5 - \sqrt{6}$ cm sau $AB = 5 + \sqrt{6}$ cm. **41.** $EM = EN + NM = \frac{a\left(\sqrt{3} + 2\right)}{2}$; $AE = \sqrt{AM^2 + ME^2} = \frac{a\left(\sqrt{3} + 1\right)}{\sqrt{2}}$; $m(\sphericalangle MEA) = 15° \Rightarrow \sin 15° = \frac{AM}{AE} = \frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{3} - 1\right)}{4}$; $\cos 15° = \frac{ME}{AE} = \frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{3} + 1\right)}{4}$; $\operatorname{tg} 15° = \frac{AM}{ME} = 2 - \sqrt{3}$; $\operatorname{ctg} 15° = 2 + \sqrt{3}$; $\sin 75° = \cos 15°$; $\cos 75° = \sin 15°$; $\operatorname{tg} 75° = \operatorname{ctg} 15°$; $\operatorname{ctg} 75° = \operatorname{tg} 15°$. **42.** Fie $EF \perp DC$ și $EG \perp AB$; $EF = FG - EG = \frac{a\left(2 - \sqrt{3}\right)}{2}$, $DE = \sqrt{DF^2 + EF^2} = a\sqrt{2 - \sqrt{3}}$; $P_{EDC} = a\left(2\sqrt{2 - \sqrt{3}} + 1\right)$. **43.** $\Delta AMQ \equiv \Delta BMN \equiv \Delta CNP \equiv \Delta DPQ \Rightarrow [MN] \equiv [NP] \equiv [PQ] \equiv [QM]$, (1); $m(\sphericalangle QMN) = 360° - [m(\sphericalangle QMA) + m(\sphericalangle AMB) + m(\sphericalangle BMN)] = 90°$, (2). Din (1) și (2) $\Rightarrow MNPQ$ – pătrat; BMN – triunghi echilateral rezultă că $[MN] \equiv [BM]$. Rezultă că $MN = a\sqrt{2 - \sqrt{3}}$. **45.** I. $DA' = 18$, $B'C = 10$ rezultă $CD = 58$ cm. II. $CD = DA' + AB - B'C = 38$ cm. **46.** $DB = \sqrt{AB^2 + AD^2} = 10$ cm. $AB^2 = BM \cdot BD$ rezultă $BM = \frac{32}{5}$; $\Delta BMP \sim \Delta BDC \Rightarrow \frac{MP}{DC} = \frac{BM}{BD} \Rightarrow MP = \frac{128}{25}$ cm; $\Delta DMN \sim \Delta DBC \Rightarrow \frac{MN}{BC} = \frac{DM}{DB} \Rightarrow MN = \frac{54}{25}$. Deci $NC = \frac{128}{25}$ cm și $PC = \frac{54}{25}$ cm. **48.** Fie $BB' \perp AC$; $\sin A = \frac{BB'}{AB} \Rightarrow BB' = \frac{c\sqrt{2}}{2}$, $h_a = \frac{bc\sqrt{2}}{2a}$. **49.** Se procedează ca la problema 48. **50.** Analog cu problema 48. **53.** $MD^2 = AM^2 + AD^2 \Rightarrow MD = 15$; $\Delta MBC \equiv \Delta NCD \Rightarrow \sphericalangle BMC \equiv \sphericalangle CND \Rightarrow m(\sphericalangle CND) + m(\sphericalangle NCP) = 90° \Rightarrow m(\sphericalangle NPC) = 90° \Rightarrow m(\sphericalangle MPD) = 90° \Rightarrow MP^2 + DP^2 = MD^2 = 225$. **54.** a) $AC = 3\sqrt{3}$; $BC = 6$; $AD = \frac{3\sqrt{3}}{2}$; $BD = \frac{3}{2}$; $CD = \frac{9}{2}$; b) $AC = 10\sqrt{3}$; $BC = 20$; $AD = 5\sqrt{3}$; $BD = 5$; $CD = 15$; c) $AB = AC = 10$; d) $AB = 8$; $AC = 8\sqrt{2}$; $AD = \frac{8\sqrt{6}}{3}$; e) $AB = 4$; $AC = 2\sqrt{5}$; $\operatorname{ctg} BAD = \frac{\sqrt{5}}{2}$. **55.** $\sin^2 A + \cos^2 A = 1 \Rightarrow \cos A = \frac{2\sqrt{2}}{3}$; $\operatorname{tg} A = \frac{\sqrt{2}}{4}$; $\operatorname{ctg} A = 2\sqrt{2}$. **56.** $P_{\Delta ABC} = \frac{48}{5}$; $BB' = \frac{8}{5}$. **57.** $P_{ABCD} = 5a$, $AC = a\sqrt{3}$. **58.** $BD = 4\sqrt{7}$; $AC = 4\sqrt{19}$. **59.** 60°; 120°. **60.** $h_b = \frac{a}{2}$; $BC = a\sqrt{2 - \sqrt{3}}$;

Scanned with OKEN Scanner

$h_a = \frac{a}{2\sqrt{2-\sqrt{3}}}$. **61.** $\frac{\sqrt{5}}{5}$. **62.** $P = 30$; $AC = \sqrt{97}$; $BD = 4\sqrt{10}$. **63.** $BC = \frac{10\sqrt{3}}{3}$. **64.** $\frac{a\left(3+\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)}{2}$. **65.** $a\sqrt{7}$. **66.** $\sphericalangle EAM \equiv \sphericalangle EAD \Rightarrow \text{tg}EAM = \text{tg}EAD = \frac{DE}{AD} = \frac{\sqrt{42}}{84}$. **67.** $\sin B = \frac{\sqrt{655}}{30}$; $\cos B = \frac{7\sqrt{5}}{30}$; $\text{tg}\,B = \frac{\sqrt{131}}{7}$; $\text{ctg}\,B = \frac{7\sqrt{131}}{131}$. **68.** Ducem $MN \perp AC$ și $BD \perp$ $\perp AC$. Notăm lungimea lui MC cu $2a \Rightarrow MN = a$, $BD = 2a$, $AN = a\left(2+\sqrt{3}\right)$, $\text{tg}MAC =$ $= \frac{MN}{AN} = 2-\sqrt{3}$.

CAP. VI. ◆ CERCUL ◆

1. $AD = 5$, $EB = 5$, $m(\sphericalangle AOE) = 72°$ și $m(\sphericalangle AOB) = 108°$. **2.** 70°, 130°, 160°, 80°, 35°, 65°. **4.** 36°15', 18°10' etc. **5.** 15°, 60°, 120°, 165°. **6.** 0,79 cm. **7.** a) 15°; b) $m(\sphericalangle ACB) = 30°$, $m(\sphericalangle BAC) =$ $= m(\sphericalangle ABC) = 75°$. **8.** a) $\overset{\frown}{AM} \equiv \overset{\frown}{NB} \Rightarrow [AM] \equiv [NB]$. b) $m(\sphericalangle AOM) = m(\sphericalangle OMN) \Rightarrow MN \parallel AB$. c) $[AM] \equiv [NB]$, $MN \parallel AB \Rightarrow ABNM$ este trapez isoscel. Rezultă $[AN] \equiv [BM]$. **9.** n puncte determină $\frac{n(n-1)}{2}$ coarde și $n(n-1)$ arce. **10.** a) 60°; b) triunghi echilateral. **11.** Triunghiul ABD este isoscel, deci înălțimile corespunzătoare laturilor congruente sunt congruente. **12.** Se demonstrează mai întâi că D aparține cercului circumscris triunghiului ABC. Deci $m(\sphericalangle BDC) = 90°$. **13.** 60°. **14.** $m(\sphericalangle DHC) = 90°-$ $- m(\sphericalangle ACH)$, $m(\sphericalangle BDC) = m(\sphericalangle BAC) = 90° - m(\sphericalangle ACH)$. $\sphericalangle DHC \equiv \sphericalangle BDC \Rightarrow (DC) \equiv (CH)$; $\sphericalangle EHB \equiv \sphericalangle CEB \Rightarrow (BH) \equiv (BE)$. **15.** a) $m(\sphericalangle CAE) = m(\sphericalangle ABD) = m(\sphericalangle AEC)$. Deci $[CE] \equiv [CA]$. b) $m(\sphericalangle CEB) = m(\sphericalangle CAB) = m(\sphericalangle ADB) \Rightarrow CE$ este tangentă cercului circumscris triunghiului DBE. **16.** a) $m(\sphericalangle OQP) = 90° - \alpha$, $m(\sphericalangle OPQ) = 90° - \alpha$ unde $\alpha = m(\sphericalangle TAO) = m(\sphericalangle ATO)$. b) $\Delta BOQ \equiv$ $\equiv \Delta COP \Rightarrow (BQ) \equiv (PC) \Rightarrow (BP) \equiv (QC)$. **17.** M este ortocentrul triunghiului EAB. Diametrul $[AB]$ fiind perpendicular pe coarda $[PQ]$ rezultă că F este mijlocul lui $[PQ]$. **18.** Simetricul lui H față de BC aparține cercului circumscris triunghiului ABC și $\Delta BHC \equiv \Delta BH'C$, ($H'$ fiind simetricul lui H față de BC). **19.** Fie A' mijlocul lui $[BC]$. Avem $EC^2 = CB' \cdot CA = CA' \cdot CB = = \frac{CB^2}{2}$. Deci $CB = EC\sqrt{2} = CF$. **20.** $\Delta APT \equiv \Delta BQT \Rightarrow (AP) \equiv (BQ)$ și $\sphericalangle TAP \equiv \sphericalangle TBQ$; $\sphericalangle QBA \equiv \sphericalangle ABT \Rightarrow$ $\Rightarrow \sphericalangle PAB \equiv \sphericalangle QBA$. De asemenea $\sphericalangle TPQ \equiv \sphericalangle TQP \Rightarrow \sphericalangle APQ \equiv \sphericalangle BQP$. Deci $AB \parallel PQ$. **21.** Segmentele AA', BB' și CC' sunt perpendiculare pe laturile triunghiului $A'B'C'$. **22.** Fie A' mijlocul arcului BC. (AA' este bisectoare în același timp pentru unghiurile $\sphericalangle BAC$ și $\sphericalangle OAH$; rezultă că triunghiul AOH este isoscel. Fie C'' proiecția lui C pe AB, iar F proiecția lui O pe AC. $\Delta AC''H \equiv \Delta AOC$ deci $AC'' = \frac{AC}{2}$ de unde rezultă concluzia. **23.** $AQ = NQ - AN = \frac{NP - AN - AM}{2} = \frac{MP}{2} = MB$. **24.** Notăm tangenta cu DA, $D \in BC$; $\Delta ABD \sim \Delta CAD \Rightarrow AD = \frac{AB}{AC} \cdot CD$, $AD = \frac{BD}{AB} \cdot AC$. **25.** $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1 \Rightarrow \sphericalangle A \equiv$ $\equiv \sphericalangle A_1$, $\sphericalangle B \equiv \sphericalangle B_1$, $\sphericalangle C \equiv \sphericalangle C_1 \Rightarrow \Delta A_1BC$ este echilateral $\Rightarrow m(\sphericalangle A_1) = 60° = m(\sphericalangle A)$. Analog $m(\sphericalangle B) = 60°$. **26.** a) $m(\sphericalangle ABC) = 30°$, $m(\sphericalangle BAC) = 50°$; $m(\sphericalangle ACB) = 100°$. b) Din teorema bisectoarei rezultă $BD \cdot AC = 36$. Mai avem $BD + AC = 12$. Deci $AC = 6$, $BD = 6$. **27.** 30°. **28.** Fie A punctul diametral opus lui O'' în cercul $C(O', R_1)$; $\Delta AQO'' \sim \Delta PMO'' \Rightarrow \frac{O''Q}{O''M} = \frac{O''A}{O''P} \Rightarrow O''P \cdot$ $\cdot O''Q = O''A \cdot O''M = 2R_1R_2 =$ *constant*. **29.** $AMNC$ este inscritibil rezultă $m(\sphericalangle BAC) =$

$= m(\sphericalangle MNC) = x$. Patrulaterul $BMPN$ este inscritibil rezultă $m(\sphericalangle MBP) = m(\sphericalangle MNP) = y$. $x + y = 90°$ rezultă $m(\sphericalangle AQB) = 90°$, unde $\{Q\} = BP \cap AC$. **30.** Într-un patrulater inscriptibil bisectoarea unui unghi interior se intersectează cu bisectoarea unghiului opus exterior pe cercul circumscris patrulaterului. În cazul nostru, patrulaterul BCB_1C_1 este inscriptibil și conform proprietății de mai sus, punctele M și N aparțin cercului circumscris patrulaterului BCB_1C_1. **31.** Din teorema catetei rezultă $AB^2 = BP \cdot BM = BQ \cdot BN$. **32.** Bisectoarea unui unghi al unui triunghi se intersectează cu mediatoarea laturii opuse unghiului, într-un punct ce aparține cercului circumscris triunghiului. Deci punctele M, N, P aparțin cercului circumscris triunghiului ABC. **39.** Simetricul lui H față de M aparține cercului circumscris și este punctul diametral opus lui A, deci E se află pe cercul circumscris. Analog pentru F. **40.** $\sphericalangle AEA' \equiv \sphericalangle AA'B \equiv \sphericalangle ACB$. **41.** $\Delta MPA \sim \Delta LPB \Rightarrow \frac{PA}{PB} = \frac{PM}{PL}$; $\Delta PBC \sim \Delta PNM \Rightarrow \frac{PB}{PN} = \frac{PC}{PM}$. **42.** a) $T_1O_1 \parallel T_2O_2 \Rightarrow \frac{T_1P}{PO_2} = \frac{T_1O_1}{T_2O_2} = \frac{r_1}{r_2} = \frac{O_1T}{TO_2} \Rightarrow PT \parallel T_1O_1$. b) Se ține cont că lungimea segmentului dus prin punctul de intersecție a diagonalelor unui trapez, paralel cu bazele trapezului și cu extremitățile pe laturile neparalele este media armonică a lungimilor bazelor trapezului. **43.** Se adună relațiile $\frac{PQ}{PB} = \frac{QC}{AC}$ și $\frac{PQ}{PC} = \frac{BQ}{AB}$. **44.** $2EF = 2DF - 2DE = (DC + DB - BC) - (DC + DA - AC) = AC - BC$. **47.** PA intersectează al doilea cerc în C, iar PT^2 este puterea punctului P în raport cu cercul $(O_2) \Rightarrow PT^2 = PA \cdot PC$. $\Delta BPC \sim \Delta BO_1O_2 \Rightarrow PC = PB \cdot \frac{O_1O_2}{O_2B}$, etc.

CAP. VII. • POLIGOANE REGULATE •

1. $S_3 = S_4 \cdot \frac{3\sqrt{3}}{8}$. **4.** $72\ cm^2$. **5.** $n = 16$. **6.** $Nd = \frac{n(n-3)}{2}$. **7.** $l_8 = 3\sqrt{2-\sqrt{2}}$, $l_{12} = 3\sqrt{2-\sqrt{3}}$; $a_8 = \frac{3}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$, $a_{12} = \frac{3\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$; $S_8 = 18\sqrt{2}$, $S_{12} = 27$. **8.** a) $R = 6$; b) $R = 3\sqrt{2}$; c) $R = 2\sqrt{3}$. **9.** $600\sqrt{3}\ m^2$; $864\sqrt{3}\ m^2$. **10.** $r = \frac{a\sqrt{3}}{6}$; $\frac{a\sqrt{3}}{6} < 0,3a \Leftrightarrow \sqrt{3} < 1,8$ (*adevărat*). **11.** Se arată că toate laturile dodecagonului sunt egale cu latura hexagonului și că toate unghiurile au ca măsură 150°. **12.** $n = 36$; 170°. **13.** Linia centrelor și coarda comună se taie în E. Se duc prin E bisectoarele unghiurilor drepte și se obțin vârfurile pe cercuri. *Se va justifica construcția.* **15.** a) Triunghiul PCA este echilateral. Se va arăta că $APBF$ este paralelogram. b) PF se calculează din ΔPCF. **16.** $S_1 = \frac{a^2(\pi-2)}{2}$, $S_2 = a^2(\pi-4) \Rightarrow S_1 < S_2$. **17.** Fie $ABCD$ pătratul considerat, punctul M cu $B \in [AM]$ și $BM = 2AB$, iar MT una din tangentele cercului circumscris pătratului duse din M. $MT^2 = MA \cdot MB$, $AB = R\sqrt{2} \Rightarrow MA = 3AB = 3R\sqrt{2}$, $MB = 2R\sqrt{2}$. Deci $MT^2 = 12R^2$ de unde $MT = 2R\sqrt{3} = 2l_3$. **18.** $l_{2n} = \sqrt{R\left(2R - \sqrt{4R^2 - a^2}\right)}$. **19.** Pe fiecare latură a unui triunghi echilateral se construiesc triunghiuri echilaterale, pe laturile acestora alte triunghiuri echilaterale etc. Se observă că în jurul fiecărui vârf se grupează 6 triunghiuri care formează în jurul punctului 360°. În felul acesta se poate umple tot planul fără goluri. Același raționament pentru pătrat și hexagon. Măsura unghiului unui poligon regulat este $\alpha = \frac{(n-2)180°}{n}$. Trebuie dovedit că $\frac{360°}{\alpha} \in \mathbf{Z}$ numai pentru $n \in \{3, 4, 6\}$

Scanned with OKEN Scanner

21. $AD = R\sqrt{2}$, $AC = 2R$, $BD = \dfrac{R\left(1+\sqrt{3}\right)}{\sqrt{2}}$. **22.** a) Se arată că $\Delta EDF \sim \Delta DOF$ și se folosește faptul că $EF = OF + R$; b) $\Delta BCF \sim \Delta CFG$; c) $m(\sphericalangle EDF) + m(\sphericalangle DFG) = 180°$. **23.** a) $\Delta AGF \sim \Delta FAM$; b) Se arată că $m(\sphericalangle B) + m(\sphericalangle K) = 180°$. **24.** a) A și F sunt diametral opuse; b) În ΔDGF, $FG = 2 \cdot DF$; c) $m(\sphericalangle ACG) = 90°$. **25.** Se folosesc egalitățile de forma $\dfrac{h_1}{r} = \dfrac{2p}{a}$, p fiind semiperimetrul triunghiului și inegalitățile $\dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a} \geq 2$, etc.

CAP. VIII. ◆ ARII ◆

1. $\left(4\sqrt{5} + 2\sqrt{10}\right)$ cm. **2.** 4,5 cm^2. **3.** $200\sqrt{3}$ cm^2. **4.** $6 + 2\sqrt{3}$ cm. **5.** 10 cm. **6.** a) 48 cm^2; b) 9,6 cm. **7.** $30\sqrt{2}$ cm^2. **8.** 10 cm^2. **9.** De patru ori. **12.** 1200 cm^2. **13.** a) Folosim notațiile obișnuite. Cunoaștem $\dfrac{bc}{2} = 2730$, $b + c = 151$, deci $a^2 = b^2 + c^2 = (b+c)^2 - 2bc$; $a = 109$ cm. b) $(b-c)^2 = b^2 + c^2 - 2bc = 961$; $|b-c| = 31$ cm . c) 60 cm; 91 cm. **14.** Notăm catetele cu b și c, calculăm mai întâi $(b+c)^2$ și $(b-c)^2$; catetele au 7 cm și 24 cm. **17.** 60 cm^2. **18.** Demonstrați că triunghiul este dreptunghic. Aria este de $\dfrac{1}{2}$ cm^2. **19.** a) $MG = \dfrac{2}{3}AA'$, $BG = \dfrac{2}{3}BB'$, $BM = \dfrac{2}{3}CC'$. Triunghiul BMG este dreptunghic. $A_{BMG} = \dfrac{128}{3}$ cm^2; b) $A_{ABC} = 128$ cm^2. **20.** 36 cm^2. **21.** Suma distanțelor de la M la $[AB]$ și $[AC]$ este egală cu înălțimea BB', deci $AB = 10$ cm. Folosind triunghiul dreptunghic ABB' se arată că $m(\sphericalangle A) = 60°$. **22.** Suma distanțelor de la un punct interior triunghiului echilateral la laturi este egală cu înălțimea triunghiului. Aria este $\dfrac{64\sqrt{3}}{2}$ cm^2. **24.** Triunghiurile IBM și IBA au bazele ($[BM]$ și $[AB]$) congruente și înălțimile corespunzătoare congruente. Deci ariile lor sunt egale. La fel, triunghiurile ICN și ICA au ariile egale. **25.** a) $a = 26$, $b = 28$, $c = 30$. b) Notăm $AB' = x$. Din teorema lui *Pitagora* în triunghiurile ABB' și BCB' avem: $30^2 - x^2 = 26^2 - (28-x)^2$, de unde $x = 18$ cm, $BB' = 24$ cm. c) 336 cm^2. d) 8 cm. **26.** Notăm laturile și aria primului triunghi cu a, b, c, S, laturile și aria celui de-al doilea triunghi cu a', b', c', S'. Avem: $\dfrac{a}{a'} = \dfrac{S}{S'}$, $\dfrac{b}{b'} = \dfrac{S}{S'}$, $\dfrac{c}{c'} = \dfrac{S}{S'}$. Triunghiurile au laturile respectiv proporționale deci sunt asemenea. Raportul de asemănare este egal cu raportul înălțimilor și cum acest raport este egal cu 1, triunghiurile sunt congruente. **27.** a) Din faptul că $m(\sphericalangle A) < m(\sphericalangle C)$ rezultă că $AC < AB$, deci $CD < BD$. Fie $E \in (BD)$ așa încât $[CD] \equiv [ED]$. Demonstrăm că $AC = AE = BE$. Găsim $BD = 8$ cm, $CD = 3$ cm. b) $\cos C = \dfrac{3}{5}$, $\operatorname{tg} B = \dfrac{1}{2}$, etc. c) $16 + 4\sqrt{5}$ cm; 22 cm^2. **28.** a) Se arată că $m(\sphericalangle AMH) = 30°$. b) $a = 12$; din $b^2 + c^2 = 144$ și $bc = 36$ obținem $(b+c)^2 = 216$, deci $b + c = 6\sqrt{6}$. Perimetrul este $12 + 6\sqrt{6}$. **29.** b) $\operatorname{ctg} C + \operatorname{ctg} B = \dfrac{BC}{AA'} = \dfrac{BC^2}{2S}$. Scriem încă două relații analoage, apoi adunăm membru cu membru cele trei egalități. **30.** a) Fie B' și M', proiecțiile lui B și M pe AC. $\dfrac{A_{ENC}}{A_{MNC}} = \dfrac{BB'}{MM'} = \dfrac{AB}{AM} > 1$. b) Relația demonstrată la punctul a) se scrie sub forma: $A_{BOC} + A_{ONC} > A_{MON} + A_{ONC}$. c) Notăm $m(\sphericalangle BOC) = \alpha$. Relația de la punctul b) se scrie: $\dfrac{OB \cdot OC \sin\alpha}{2} >$

$> \frac{OM \cdot ON \sin \alpha}{2}$, de unde rezultă *concluzia.* **31.** a) $A_{ABC} = A_{ABD} + A_{ACD} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \frac{AB \cdot AC \sin 120^\circ}{2} = \frac{AB \cdot AD \sin 60^\circ}{2} + \frac{AC \cdot AD \sin 60^\circ}{2}$, etc. **32.** 147 cm^2. **33.** 3740 cm^2. **34.** $49\sqrt{3}$ cm^2. **35.** 11 m. **36.** a) $\frac{12}{25}$; b) Perimetrul pătratului este 40 cm, iar al dreptunghiului este de 32 cm. **37.** 7 m^2, 6,75 m^2. **38.** $\frac{3\sqrt{3}}{4}$. **39.** $A_{ABCD} = AB \cdot AD \sin A$, este maximă când $\sin A = 1$, deci $m(\sphericalangle A)=90^\circ$. **45.** $9\sqrt{3}$ cm^2. **46.** $\frac{5}{9}$. **47.** b). **48.** 225 cm^2. **49.** 36 cm^2. **50.** 5. **51.** $A_{BCE} = ab$; $A_{ABCD} = \frac{(a+b)^2}{2}$. Inegalitatea $ab < \frac{(a+b)^2}{4}$ este echivalentă cu $0 < (a-b)^2$. **52.** a) $\frac{A_{AOB}}{A_{BOC}} = \frac{AO}{OC}$ deoarece ΔAOB și ΔBOC au înălțimea din B comună. $\frac{AO}{OC} = \frac{a}{b}$ din asemănarea triunghiurilor AOB și COD. b) Folosim punctul a). c) Raportul ariilor a două triunghiuri asemenea este egal cu pătratul raportului de asemănare. d) Folosim punctul b). e) $A_{ABCD} = A_{AOB} + A_{COD} +$ $+ A_{BOC} + A_{AOD} > 2(A_{BOC} + A_{AOD}) = 4A_{BOC}$. **53.** Notând cu S aria triunghiului dat avem $\frac{A_{AEG}}{S} = \frac{1}{9}$, $\frac{A_{AFH}}{S} = \frac{4}{9}$, etc. **54.** $A_{ADE} = A_{BCED} \Leftrightarrow \frac{A_{AED}}{A_{ABC}} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}}$. **55.** Latura pătratului este $l = \frac{bc}{b+c}$. Inegalitatea $\left(\frac{bc}{b+c}\right)^2 \le \frac{bc}{4}$ este echivalentă cu $0 \le (b-c)^2$. Egalitatea se obține când $b=c$. **56.** Demonstrăm că aria suprafeței hașurate este egală cu aria triunghiului MAQ deci are $1 cm^2$. **58.** $A_{AEMD} = A_{AEM} + A_{AMD} = A_{AEM} + A_{AMN} = A_{MNE} = A_{MEP} = A_{MEB} + A_{MBP} =$ $= A_{MEB} + A_{MBC} = A_{BEMC}$ **59.** Notăm cu E proiecția lui D pe AB, iar cu F proiecția lui D pe AC. Dacă $AB > AC$ atunci $E \in (AB)$ și $C \in (AF)$. Se arată că $\Delta DEB \equiv \Delta DFC$ și rezultă $A_{ABDC} = A_{AEDF} =$ $= 2A_{ADE} = 4\sqrt{3}$ cm^2. **61.** 9. **62.** 15. **63.** $4\pi\sqrt{3}$ cm; 12π cm^2. **64.** 5π cm; $\frac{25\pi}{4}$ cm^2. **65.** a) 2; b) 4. **66.** a) $\sqrt{2}$; b) 2. **67.** 10π. **68.** $r = 2,8$ cm; $5,6\pi$ cm; $7,84\pi$ cm^2. **70.** $\left(2 - \frac{\pi}{2}\right)$ cm. **71.** 25π cm^2. **72.** $\left(2\pi - 2\sqrt{3}\right) cm^2$. **73.** a) $4\left(\sqrt{2}+1\right)$ cm. b) $(2\pi - 4)$ cm^2; $\left(3\pi - 2\sqrt{2}\right) cm^2$; $\left(3\pi - 2\sqrt{2}\right) cm^2$. c) $\frac{3\pi}{2}\sqrt{2}$ cm; $\pi\sqrt{2}$ cm; $\frac{3\pi}{2}\sqrt{2}$ cm. **74.** 4π m^2. **75.** 40 cm^2. **76.** 78 cm^2. **77.** 108 cm^2. **78.** Notăm latura pătratului cu a. În triunghiul dreptunghic ACD, $m(\sphericalangle DAC) =$ $= 30^\circ$, deci $AC = AB = 2a$. **79.** a) Fie O centrul cercului. Triunghiurile AOB, BOC și COD sunt echilaterale de unde deducem că punctele A, O și D sunt coliniare. b) $75\sqrt{3}$ cm^2. **80.** $\left(2+\sqrt{2}\right)$ cm^2. **83.** Notăm patrulaterul cu $ABCD$ și centrul cercului cu O. Dacă O este în interiorul patrulaterului, $A_{ABCD} = A_{AOB} + A_{BOC} + A_{COD} + A_{DOA} = \frac{R^2}{2}(\sin AOB + \sin BOC + \sin COD + \sin DOA) \le$ $\le 2R^2$, valoarea maximă realizându-se când $\sin AOB = \sin BOC = \sin COD = \sin DOA = 1$ caz în care $ABCD$ este pătrat. Dacă O este în exteriorul lui $ABCD$ sau pe o latură, A_{ABCD} este mai mică decât aria semicercului care este $\frac{\pi R^2}{2} < 2R^2$.

*

* *

Scanned with OKEN Scanner

clasa a VIII-a

CAP. I. • NUMERE REALE •

1. a) $1\frac{1}{7}$; b) 1. **2.** a) $\sqrt{1+\sqrt{3}}$; b) 1; c) 2. **3.** 3. **8.** $4\sqrt{3+2\sqrt{2}}-\sqrt{57+40\sqrt{2}}=$ $=4\left(\sqrt{2}+1\right)-\left(5+4\sqrt{2}\right)=-1\in\mathbf{Q}$. **9.** 4. **12.** a) 8; b) 3. **14.** $2-\sqrt{3}-\sqrt{2}$. **15.** a) $5+2\sqrt{3}<$ $<\sqrt{7}+\sqrt{10}$; b) $\sqrt{\sqrt{17}-\sqrt{11}}>\sqrt{\sqrt{19}-\sqrt{13}}$. **16.** $A=2, B=\frac{2}{3}, E=\frac{9}{8}$. **20.** 1. **21.** Numărul este egal cu 8. **22.** $(n+1)^2<n^2+2n+8<(n+3)^2$. n^2+2n+8 este pătrat perfect dacă și numai dacă $n^2+2n+8=(n+2)^2$, adică pentru $n=2$. **23.** a) $[(m+10)-(m-10)]^2=400$; b) $[(m+3)-(m-2)]^2=25$. **24.** a) 2; b) 8. **26.** Pentru $k=-1$ egalitatea este verificată. Dacă $k<-1$ avem: $-(5k+1)=5(-k)-1=5\cdot(-k-1)+4$. **27.** $A=b$. **30.** a) $a+b=8$; b) a^2+ $+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)=587$. **32.** 1. **35.** $a=b-1, c=b+1, a^3+$ $+c=(b-1)^3+b+1=b^3-3b^2+4b$. **36.** $\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^2=\frac{k+2}{k-2}$. **39.** Se ajunge la b^2+ $+bc+c^2=0$ ceea ce este absurd deoarece $b^2+bc+c^2=\left(b+\frac{c}{2}\right)^2+\left(\frac{c\sqrt{3}}{2}\right)^2>0$, $(b, c>0)$. **40.** $x^4+\frac{1}{x^4}=2$. **42.** $(a+b)^2=(a+b)\left(a^2+b^2\right)=a^3+b^3+ab^2+a^2b$. a^2+b^2+ $+2ab=a^3+b^3+ab(a+b)$. Deoarece $a^2+b^2=a^3+b^3$ și $ab\neq0\Rightarrow a+b=2$. **43.** a^3+ $+b^3=(a+b)\left(a^2+b^2-ab\right)=(a+b)^2-3ab=1-3ab$. Rezultă $ab=\frac{1}{6}$. **44.** $a+b=$ $=5\cdot|t|$. **45.** Fie $d\neq1$, $d\mid n^2+4n+3$, $d\mid2n^2+3n+4$ rezultă $d\mid n-2$ deci $d\mid3n-6$ (1). Din $d\mid n-2$ și $d\mid n(n-2)+3n+3$ rezultă $d\mid3n+3$ (2). Din (1) și (2) $\Rightarrow d\mid9\Rightarrow d\in\{\pm3,\pm9\}$. Obținem $n=3k+2$, $k\in\mathbf{Z}$. **46.** Presupunem $5k-3=4x$ și $7k-2=6y$, $x, y\in\mathbf{Z}$ rezultă $k=$ $=\frac{4x+3}{5}=\frac{6y+2}{7}\Rightarrow2(14x+5)+1=30y$ absurd! **47.** $AB=\sqrt{2}+\sqrt{3}>1,414+1,732=$ $=3,146>\pi=3,14159\ldots$. **48.** a) $-\frac{13}{8}$; b) $\frac{1}{7}$. **49.** a) $\sqrt{8-2\sqrt{7}}<\sqrt{9-4\sqrt{2}}$; b) $\sqrt{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}<$ $<\sqrt{3}+\frac{1}{\sqrt{3}}$; c) $\frac{1}{\sqrt{5-2\sqrt{6}}}>\frac{1}{\sqrt{3-2\sqrt{2}}}$. **50.** 3. **51.** $-1<-b<-a<0<a^2<b^2<1<\frac{1}{b}<$ $<\frac{1}{a}$. **52.** a) Fracția se simplifică prin 9; b) subunitară. **54.** $E(x,y)=(x-y)^2+(x-1)^2+1$ valoarea minimă este 1. **55.** 1. **57.** 0. **58.** $a-1$. **61.** $\frac{a^2+b^2}{a^2b^2+1}$. **62.** a) $a^3+b^3=790$; b) $a-b=$ $=\pm\sqrt{2}$. **63.** $n\in\{3,6\}$. **64.** $n\in\{-2,2,6\}$.

Scanned with OKEN Scanner

CAP. II. ◆ INTERVALE, INECUAȚII ȘI SISTEME DE INECUAȚII ◆

§ 1. ● Intervale ●

3. a) Adevărat; b) fals; c) fals; d) adevărat; e) adevărat; f) fals; g) fals; h) adevăart. **4.** a) adevărat;b)fals; c) fals; d) adevărat. **5.** a) $[-1;1]$; b) $(-1;\infty)$; c) $[-2;2]$; d) $(-\pi;\infty)$; e) $[0;9]$; f) $[-4;4]$; g) $[-3;5)$; h) $(-\infty;+\infty)$. **6.** $A=(-\infty,3)$; $B=(-4;4]$; $C=(-\infty;+\infty)$; $D=(-3;9)$. **7.** a) $(-1;1)$; b) $\{2\}$; c) $[-2;0]$; d) $(-3;9)$; e) $[4;\infty)$; f) $(-\infty;-4]$; g) $[1;2]$; h) $[-\pi;-3]$. **8.** a) $\{-1;0;1;2;3\}$; b) $\{-2;-1;0;1;2;3;4\}$; c) $\{0;1;2;3;4\}$; d) $\{-3;-2;-1;0;1;2;3\}$; e) $\{0;1;2\}$; f) $\{1;2;3\}$; g) $\{1\}$; h) $\{-1\}$. **9.** *B, D, E, F.* **10.** a) $[0;5)$; b) $\{-4;4\}$; c) $(-\infty;13]$; d) $\varnothing$; e) $\left(\sqrt{2},\sqrt{2}+1\right)$; f) $\left(\frac{1}{2};\frac{7}{9}\right)$; g) $(-\pi;2\pi)$; h) R. **11.** a) $(-\infty;a]$; b) $(a+1;a+2)$; c) $(a;a+3)$; d) R; e) $\varnothing$; f) $(a,a+1)$; g) $(a+1;a+3]$; h) $[a,\infty)$. **13.** $x\le 2$. **14.** $x\le 7$. **15.** a) 13; b) 15; c) $2n-1$; d) $2n+1$; e) 5; f) 0; g) 4; h) 1. **16.** $I_1=[0,10]$ și $I_2=[2,7]$ sau $I_1=[2,10]$, $I_2=[0,7]$. **17.** $A=(-2,2)$; $B=[-2;2]$; $C=(-\infty;+\infty)$; $D=(-\infty,-1)\cup(1,\infty)$; $E=(-\infty;-1]\cup[1,\infty)$; $F=[-2;-1]\cup[1;2]$. **18.** $a\in(b-1,b+1)\Leftrightarrow b-1<a<b+1\Leftrightarrow -1<a-b<1\Leftrightarrow a-b\in(-1,1)$. Reciproca este adevărată. **20.** a) $[x]=2$; b) $[x]\in\{2,3\}$; c) $[x]\in\{-1;0\}$; d) $[x]\in\{3,4,5,6\}$; e) $[x]\in\{-2,-1,0,1\}$; f) $[x]\in\{0,1\}$. **21.** $44<\sqrt{1997}<45$ deci $a=44.1,41<\sqrt{2}<1,42$. Rezultă $141<100\sqrt{2}<142$ deci $b=141$. $c=36$. $d=314$. **22.** $c<a<b$. **23.** $(1;9)$. **24.** $BD\in(4;10)$, $AC\in(3;9)$.

§ 2. ● Inecuații ●

1. a) $(-\infty;2)$; b) $\left[\frac{1}{2};\infty\right)$; c) $(-\infty;-7]$; d) $(-2;\infty)$; e) $(-\infty;-20)$; f) $[4;\infty)$; g) $\left(\frac{1}{8};\infty\right)$; h) $\left(-\infty;-\frac{1}{9}\right]$; i) $\left(\sqrt{2};\infty\right)$; j) $(-1;\infty)$; k) $\left(-\infty;-\frac{1}{3}\right]$; l) $(-\infty;-2)$. **2.** a) $(2;\infty)$; b) $(-\infty;3)$; c) $\left(-\infty;-\frac{2}{3}\right)$; d) $(-\infty;-2)$; e) $(-\infty;11)$; f) $(-\infty;1)$; g) $(11;\infty)$; h) $[1;\infty)$. **3.** a) $\left(-\infty;\frac{120}{29}\right]$; b) $\left(-\infty;\frac{25}{6}\right]$; c) $\left[\frac{11}{3};\infty\right)$; d) $\left(\frac{1}{2};\infty\right)$; e) $(-1;\infty)$; f) $(-\infty;9)$; g) $\left(-\infty;\frac{3}{5}\right]$; h) $(-\infty;6]$. **4.** $a=3$, $b=4$, $x\in\left(-\infty;-\frac{6}{7}\right)$. **5.** a) $\left(-\infty;-\frac{3+\sqrt{2}}{7}\right)$; b) $\left(\frac{1}{\sqrt{17}-\pi};\infty\right)$; c) $\left[-5-2\sqrt{6};\infty\right)$; d) $(1;\infty)$; e) $\left(-\infty;1-\sqrt{3}\right)$; f) $[3-\pi;\infty)$; g) $\left(\frac{4-\sqrt{2}}{2-\sqrt{10}};\infty\right)$; h) $\left(-\infty;-3-2\sqrt{5}\right)$. **6.** a) $(-\infty;3)$; b) $(3;\infty)$. **7.** a) $\left(-\infty;\frac{1}{3}\right)$; b) $(-\infty;1]$; c) $\left(-\infty;\frac{5}{12}\right)$; d) $(-\infty;1]$. **8.** a) Mulțimea soluțiilor ecuației date este $\left(\frac{200}{9};\infty\right)$. Deoarece $\left(\frac{200}{9},\infty\right)\cap\mathbf{N}=\{23;24;25;\ldots\}$, cel mai mic număr natural care verifică inecuația este 23; b) -3. **9.** a) $\left(-\infty;\frac{9}{8}\right)$; b) $(-\infty;6]$; c) $\left(\frac{13}{4};\infty\right)$; d) $\left[\frac{5}{9};\infty\right)$. **10.** a) Înmulțind ambii membri ai inecuației cu numărul negativ $3-\pi$ obținem inecuația echivalentă $x-3>2x-7$. Soluția este $(-\infty;4)$; b) $[-3;\infty)$; c) Arătăm că

$2^{20}-3^{20}<0$. Soluția este $\left(-\infty;-\frac{19}{5}\right)$; d) $[4;\infty)$. **11.** Nu! Prima este echivalentă cu $x>1$, iar a doua cu $x<1$. **12.** a) $(4;\infty)$; b) $\left(-\infty;4+\sqrt{6}\right]$; c) $\left(-\frac{4}{3};\infty\right)$; d) $(-\infty;0]$. **13.** a) $x^2\pm x+1=$ $=\left(x\pm\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0$. b) Soluțiile sunt: $(-\infty;2)$, $(-\infty;35]$, $(-\infty;0)$. **14.** a) Cum $x^2+1>0$, $(\forall)x\in\mathbf{R}$, inecuația este echivalentă cu $3x-9<0$, $x\in(-\infty,3)$; b) $[5;\infty)$; c) $(0;\infty)$; d) $\left[\frac{7}{5};\infty\right)$; e) $\mathbf{R}$; f) $\mathbf{R}-\{2\}$; g) $\{2\}$; h) $\{-3\}$. **15.** a) Deoarece $x^2+10>0$ și $x^2+9>0$, $(\forall)x\in\mathbf{R}$, înmulțind inecuația cu $\left(x^2+10\right)\left(x^2+9\right)$ obținem inecuația echivalentă $x^2+9<x^2+10$. Soluția este $\mathbf{R}$; b) $\mathbf{R}$; c) $\mathbf{R}$; d) $\varnothing$. **16.** a) $(-\infty;0)$; b) $(-\infty;2)$; c) Numărătorul este negativ. Pentru ca fracția să fie pozitivă este necesar și suficient ca numitorul să fie negativ. Soluția este $(-\infty;-1)$; d) $\left[-\frac{2}{3};\infty\right)$; e) $(-3;\infty)-\{0\}$; f) $\mathbf{R}-\{0\}$; g) $[-\infty;1)$; h) $[1;\infty)-\{2\}$; i) $(-4;\infty)$. **17.** $A=(-\infty;5]$. $B=\left(\frac{7}{2};\infty\right)$. **18.** $A=[3;\infty)$. $B=(-\infty;3]-\{2\}$. **19.** a) $(-\infty;-9)\cup(8;\infty)$; b) $[-3;2]$; c) $\mathbf{R}$. **20.** Pentru $x>2$ avem $\frac{1}{x-2}<5\Leftrightarrow 1<5(x-2)\Leftrightarrow x>\frac{11}{5}$. Deci $A=(2;\infty)\cap$ $\cap\left(\frac{11}{5};\infty\right)=\left(\frac{11}{5},\infty\right)$. Pentru $x<2$ avem $\frac{1}{x-2}<0<5$ deci $B=(-\infty,2)$. $C=A\cup B=$ $=(-\infty,2)\cup\left(\frac{11}{5},\infty\right)$. **21.** Pentru $x<1$ inecuația se verifică. Pentru $x>1$ ea este echivalentă cu $1<x-1$. Deci, mulțimea soluțiilor este $(-\infty,1)\cup(2,\infty)$. **22.** a) $\mathbf{R}$; b) $\{3\}$; c) $\varnothing$; d) $\mathbf{R}$; e) $\mathbf{R}-\{5\}$; f) $\{1\}$. **23.** a) Inecuația este echivalentă cu $\frac{x^4+x^2+1}{(x-1)\left(x^2+x+1\right)}<0$. Deoarece pentru orice $x\in\mathbf{R}$ avem $x^4+x^2+1>0$ și $x^2+x+1>0$, inecuația este echivalentă cu $x-1<0$ deci $x\in(-\infty;1)$; b) $(-\infty;-1)$; c) $(1;\infty)$; d) $[1;\infty)$; e) $(-\infty;2]-\{-2\}$. **24.** a) $\{0;1;2;\ldots;8\}$; b) $\{0;1;2;3;4;5\}$; c) $\{0;1;2;\ldots;6\}$; d) $\{0\}$. **25.** a) $(2;\infty)$; b) $(-\infty;2)$. **26.** a) $(3;\infty)$; b) $(-\infty;3)$. **27.** Ecuația este echivalentă cu $3ax\le 5a^2$. Dacă $a>0$ soluția este $\left(-\infty;\frac{5a}{3}\right]$, iar dacă $a<0$ soluția este $\left[\frac{5a}{3};\infty\right)$. a) $a=-6$. b) $a=9$. c) Nu există a astfel încât soluția să fie $[4;\infty)$. **28.** Analizăm cazul când x este par, apoi când x este impar. a) $\{0;1;2\}$; b) $\{1;3;5;7;\ldots\}=$ $=\{2k+1\,|\,k\in\mathbf{N}\}$; c) $\{0;2;4;6;\ldots\}=\{2k\,|\,k\in\mathbf{N}\}$.

§ 3. • Sisteme de inecuații •

1. a) $(-\infty;2)$; b) $\left[\frac{13}{4},\infty\right)$; c) $(-3;-1]$; d) $\left[\frac{10}{13};\frac{7}{9}\right)$; e) $\left[-\frac{22}{9};2\right]$; f) $[-0,01;5]$; g) $\{0\}$; h) $(2;7)$. **2.** a) $(1;\infty)$; b) $\left(-3-2\sqrt{2};-3+2\sqrt{2}\right)$; c) $[-2;2]$; d) $\left[-\frac{7}{4};\frac{7}{4}\right]$. **3.** a) $(2;12)$; b) $(-3;9)$; c) $(2;3)$; d) $[-5;3]$. **4.** a) $\{3;4\}$; b) $\{0;1;2\}$; c) $\{1;2;3;4;5\}$; d) $\{-3;-2;2;3\}$. **5.** a) $\left(-\frac{1}{2};\frac{3}{5}\right)$; b) $(5+10x)(3-5x)\ge\frac{121}{8}\Leftrightarrow(20x-1)^2\ge 0$ ceea ce este evident; c) $x=\frac{1}{20}$. Perimetrul este 16,5. **6.** Notăm lungimile laturilor cu a, b, c. Punând condițiile $a>0, b>0, c>0, a<$ $<b+c$, $b<a+c$ și $c<a+b$ obținem un sistem de inecuații în x, a cărui soluție este $(1;5)$. **7.**

a) $(180; 450)$; b) $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}; \sqrt{3}\right)$. **8.** a) $(a-b; a+b)$; b) $(a+b; a-b)$. **9.** $x=9$. Dimensiunile sunt 5 și 2. **10.** $x \in [-7, 3]$. **11.** $-1 \le -2x+9 \le 19 \Leftrightarrow x \in [-5; 5]$. Soluția problemei este $[-5; 5] \cap [0; 10] = [0; 5]$. **12.** Problema revine la rezolvarea în mulțimea numerelor naturale a dublei inecuații: $0,05 \cdot 10 \le 2(3x-5) \le 0,05 \cdot 99$. Se obține $x=2$. **13.** Avem $-6 < \left(\frac{x}{4} - \frac{1}{3}\right) 12 - 2 < 21 \Leftrightarrow x \in (0; 9)$; $-7 < 2[2(x-1)-1]-1 < 45 \Leftrightarrow x \in (0; 13)$. Dacă $x \in (0; 9)$ atunci $x \in (0; 13)$. Reciproca este falsă. **14.** a) $A=(3; \infty)$; $B=(-\infty; -1)$; b) $C=A \cup B$ (pe baza "*regulei semnelor*" pentru produs); c) $D=E=A \cup B$ (pe baza "*regulei semnelor*" pentru cât). **15.** a) $(-\infty; 5) \cup (7; \infty)$; b) $(-\infty; -1) \cup (1; \infty)$; c) $(-3; 3)$; d) $(-\infty; 2] \cup [4; \infty)$; e) $(-\infty; -4] \cup [-2; \infty)$; f) $\left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$; g) $(-\infty; -20) \cup (20; \infty)$; h) $[-1; 9)$. **16.** Inecuațiile $x^2-4>0$ și $\frac{x-2}{x+2}>0$ sunt echivalente. Inecuațiile $x^2-4 \ge 0$ și $\frac{x-2}{x+2} \ge 0$ nu sunt echivalente deoarece -2 verifică inecuația $x^2-4 \ge 0$ dar nu verifică condițiile de existență pentru inecuația $\frac{x-2}{x+2} \ge 0$. **17.** a) $A=(-2; 5)$. $B=\varnothing$; c) $C=A \cup B=(-2; 5)$; d) $D=E=A \cup B$. **18.** a) $(-4; 4)$; b) $[-10; 10]$; c) $\left(-\infty; -\frac{2}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}; \infty\right)$; d) $(-1; 3)$; e) $[-3; 1)$; f) $[2; 7]$; g) $(0; 3)$; h) $(-5; 0]$. **19.** Inecuațiile $x^2-3x+2<0$ și $\frac{x-1}{x-2}<0$ sunt echivalente. Inecuațiile $49-x^2 \le 0$ și $\frac{7-x}{7+x} \le 0$ nu sunt echivalente. **20.** Da. Nu. **21.** a) $(3; 5)$; b) $(-\infty; 2] \cup [8; \infty)$; c) $(-\infty; -1) \cup (1; \infty)$; d) $[-1; 0]$; e) $[0; 2]$; f) $\varnothing$. **22.** a) $(-\infty; -3) \cup (2; \infty)$; b) $(-5; \infty)$; c) $(-\infty; 6) \cup (9; \infty)$; d) $\left[0; \frac{2}{3}\right)$; e) $\mathbf{R}-\{1\}$; f) $\{-2\}$. **23.** a) $\left(-\sqrt{2}; \sqrt{2}\right) \cap \mathbf{Z} = \{-1; 0; 1\}$; b) $\left(-\frac{1}{2}; \infty\right) \cap \mathbf{Z} = \mathbf{N}$; c) $\{2; 3; 4; 5\}$; d) $\mathbf{Z}-\{0\}$. **24.** 65 elemente. **25.** a) $n^2-n \ge 0 \Leftrightarrow n \in (-\infty; 0] \cup [1; \infty)$. $\mathbf{Z} \cap ((-\infty; 0] \cup [1; \infty)) = \mathbf{Z}$; b) Adunăm inecuațiile sistemului și obținem $\left(x^2-x\right)+\left(y^2-y\right) \le 0$. Ținând seama de punctul a) deducem $x^2-x=y^2-y=0$. Din $x^2-x=0$ rezultă $x \in \{0; 1\}$. Înlocuind pe rând în sistem $x=0$ și $x=1$ găsim soluțiile: $(0; 0)$ și $(1; 1)$.

CAP. III. ◆ FUNCȚII ◆

1. a) $f(-2)=4 \in B, f(-1)=1 \in B, f(0)=0 \in B, f(1)=1 \in B, f(2)=4 \in B$ și deci f este o funcție. b) $f(0)=-1 \notin B \Rightarrow f$ nu este o funcție. c) f este o funcție. d) $f(-1)=1 \in B, f(1)=3 \in B, f(3)=5 \notin B$ și deci f nu este funcție. **2.** a), c), e). **3.** a) și c) nu definesc o funcție; b) d), c) și f) sunt funcții. **4.** Da. **5.** a) $\mathbf{R}$; b) $\mathbf{R}-\{0, 2\}$; c) $[-2, \infty)$. d) $\mathbf{R}$; e) $\mathbf{R}-\{\pm 4\}$. **8.** a) $f(x)=\begin{cases} 2x+1, & x \ge -2 \\ x-1, & x<-2 \end{cases}$; b) $f(x)=\begin{cases} -2x-1, & x \le -2 \\ 3, & -2<x \le 1 \\ 2x+1, & x>1 \end{cases}$. **9.** a) crescătoare pe $\mathbf{R}$, deoarece $a=2>0$; b) descrescătoare pe $\mathbf{R}$, deoarece $a=-1<0$; c) crescătoare pe $\mathbf{R}$; d) dacă $m>1$: f este crescătoare; dacă $m<1$: f este descrescătoare; dacă $m=1, f(x)=5 (\forall) x \in \mathbf{R}$. **13.** $A=32$. **14.** $x \in [-1, 1]$. **15.** $G_f=\{(-2, 0), (2, 2), (4, 3)\}$. **17.** $f(6)=3 \Rightarrow a=5 \Rightarrow f(x)=\begin{cases} 2x-3, & x<4 \\ -x+9, & x \ge 4 \end{cases}$.

Scanned with OKEN Scanner

18. a) Găsim: $f(x) = -3x + \frac{13}{2}$; b) Soluția inecuației este $x \le \frac{7}{3}$. **19.** $f(x) = 2x + |x-3| - |x+4| = \begin{cases} 2x+7, & x<-4 \\ -1, & -4 \le x < 3 \\ 2x-7, & x \ge 3 \end{cases}$. Rezolvând ecuația $f(x) = g(x)$, pentru fiecare interval de mai sus avem: $x \in \{8, 0, 6\} \Rightarrow (x, y) \in \{(-8,-9), (0,-1), (6, 5)\}$. **20.** $A(a, 3) \in G_f \Rightarrow f(a) = a^2 + 2 = 3, a < 1$ sau $\frac{1}{2}a + a = 3, a \ge 1 \Leftrightarrow a = -1$ sau $a = 2$. **21.** $a = 2, b = 3$. **22.** $x = 0 \Rightarrow f(-1) = -3 \Rightarrow f(x-1) = 2(x-1) - 1 \Rightarrow f(x) = 2x - 1, (\forall) x \in \mathbf{R}$; b) $B(2, 3) \in G_f$; c) $g(x) = 2|x| - 1 = \begin{cases} 2x-1, & x \ge 0 \\ -2x-1, & x < 0 \end{cases}$. **23.** $x = 1 \Rightarrow f(-1) = 1 \Rightarrow f(x) = x + 2$; $A(2; 2) \in G_g \Leftrightarrow 2 = a - 2 \Rightarrow a = 4 \Rightarrow g(x) = -x + 4$. Deci $h(x) = \begin{cases} x+2, & x \le 1 \\ -x+4, & x > 1 \end{cases}$. **24.** a) $E = \left\{2 + \sqrt{6}, 0, \sqrt{6} - \sqrt{2}, 2, \sqrt{2}\right\}$; b) $E \cap Q \ne \varnothing$, $E - Q \ne \varnothing$. **25.** a) $n = 3 \Rightarrow f: [0, 3] \to \mathbf{R}$, $f(x) = (-1)^{[x]} + (-1)^{2[x]} + (-1)^{3[x]} = \begin{cases} 3, & x \in [0,1) \cup [2,3) \\ -1, & x \in [1,2) \cup \{3\} \end{cases}$; b) $f(x) \in \{0, n\}$, n - par; $f(x) \in \{-1, n\}$, n - impar. **26.** $f(x) > g(x) \Leftrightarrow (a+4)x > 5 - b$. 1) $a < -4 \Rightarrow A = \left(-\infty, \frac{5-b}{a+4}\right)$; 2) $a = -4, b > 5 \Rightarrow A = \mathbf{R}$; 3) $a = -4$ și $b \le 5 \Rightarrow A = \varnothing$; 4) $a > -4 \Rightarrow A = \left(\frac{5-b}{a+4}, \infty\right)$; $B = [-15, 9]$. **27.** a) $m = -2$, etc. b) $A(1, 1)$. **28.** a) $a = b = -\frac{3}{m^2+2} < 0$, $(\forall) m \in \mathbf{R} \Rightarrow f$ este descrescătoare. **29.** $f(x) = 3x - 2$; $A, B, D \in G_f$. **30.** $x \in (-\infty, 2]$. **31.** Se observă că: $f(x) \le 3, (\forall) x \in \mathbf{R}$, $f(x - 1990) + 1989 f(-x + 1990) \le 1990 \cdot 3 = 5970$. Deci: $f(x - 1990) = f(-x + 1990) = 3 \Rightarrow x - 1990, -x + 1990 \in [-1, 2] \Rightarrow x \in [1989, 1991]$. **32.** $x \in \{2, 4, 8\}$; b) $x \in \left[-2, \frac{4}{3}\right]$. **33.** $f(x) = \frac{2(x+2)(x-3)}{|x+2| \cdot |x-3|}$, $f: \mathbf{R} - \{-2, 3\} \to \mathbf{R}$. **34.** a) $f(x) = a(x+4)$; b) $a = -1$; c) $x \in (-6, 5)$.

CAP. IV. ◆ POLINOAME ◆

1. $a \ne 0$; b) 20 dacă $a \ne 0$ și 18 dacă $a = 0$; c) Dacă $a \in \mathbf{R} - \{-1, 1\}$ gradul este 4. Dacă $a = 1$ gradul este 2, iar dacă $a = -1$ gradul este 1. **2.** a) 101; b) 0. **3.** $a = b = 1, c = d = -1$. **4.** $a \in \mathbf{R} - \{-2\}$. **5.** $E(a) = 2$. **6.** $a = -\frac{3}{5}; b = -\frac{9}{5}$. **7.** $B = \left\{1, -1, \sqrt{2}, -\sqrt{2}\right\}$. **11.** $Q_1(X) = a_9X^9 + a_7X^7 + a_5X^5 + a_3X^3 + a_1X$; $Q_2 = a_{10}X^{10} + a_8X^8 + a_6X^6 + a_4X^4 + a_2X^2 + a_0$. **12.** b) $a = \sqrt{2}$. **13.** d) $P(\alpha) = (1-\alpha) + \alpha^6\left(1 - \alpha^9\right) + \alpha^{16}(1-\alpha) + \alpha^{20} > 0, (\forall)\alpha \in (0; 1)$; e) $P(\alpha) = \alpha^{17}\left(\alpha^3 - 1\right) + \alpha^{15}(\alpha - 1) + \alpha\left(\alpha^5 - 1\right) + 1 > 0, (\forall)\alpha \in (1; \infty)$. **14.** $Q(X) = X^2 + \left(X^2 - X\right)^2 + (X-1)^2$, deci $P(\alpha) > 0, (\forall)\alpha \in \mathbf{R}$. Pentru polinoamele $P(X)$ și $T(X)$ se folosește o metodă asemănătoare celei din problema precedentă. **15.** a) 100; b) 15; c) 200; d) 200; e) 115. **16.** a) $Q(X) = X^8 - 1$. **17.** $P(X) = X^2 + 3$; $Q(X) = 4X$. **18.** $P(X) = (X-1)^2 + 2$; $P(a) = P(b) = (a-1)^2 = (b-1)^2 \Rightarrow |a-1| = |b-1| \Rightarrow a - 1 = \pm(b-1)$. Cum $a \ne b$ rezultă $a - 1 = -b + 1$, deci $a + b = 2$. **19.** a) X^2; b) $X^2 + 1$. **22.** $X^8 - 1$. **23.** b) $X^{12} - 1$. **24.** a)

Scanned with OKEN Scanner

Câtul este $X-1$, iar restul este 0; b) Câtul este $X^6+2X^5+4X^4+8X^3+16X^2+32X+64$, iar restul este 0; c) Câtul este X^4+X^2+1, iar restul 0. **25.** a) X^3+X+3; b) X^3-X+1; c) X^3+3. **26.** a) $2X^4+$ $+X^3+X^2$; b) X^3+1. **27.** Împărțitorul este de gradul al doilea deci restul este de forma $R(X)=aX+$ $+b$. Găsim $a=1; b=2$, iar împărțitorul este X^2-X+1. **28.** 0. **30.** $X\left(\sqrt{2}+1\right)$. **31.** a) $a=-2$; b) $a=2$; c) $a=\frac{11}{32}$; d) $a=\frac{1}{32}$. **32.** $a=3, b=5$. **33.** $n=0, m=-4$. **34.** $a=b=-1$. **35.** $a=-1, b=-2$. **36.** $m=-2, n=2$. **37.** Restul la împărțirea cu X^2-1 este de forma $aX+b$. Notăm câtul cu $Q(X)$ și avem: $P(X)=\left(X^2-1\right)Q(X)+aX+b$. Dăm lui X valorile 1 și -1 și găsim: $\begin{cases} a+b=2 \\ -a+b=32 \end{cases}$ deci $b=17, a=-15$. **38.** $a=-2, b=-4$. **39.** a) 0; b) $(X+1)^4$. **40.** b) $P(X)=(X-2)\left(X^2-X+1\right)$; $Q(X)=X(X+1)\left(X^2+X+2\right)$. **41.** $a^2=\frac{5}{2}\in Q$, $a>0$; $a=\frac{\sqrt{10}}{2}\in \mathbf{R}-\mathbf{Q}$; b) $m=-120$. **42.** a) 0; b) 5050; c) 50; d) $P(X)=\left(X^2-1\right)Q(X)+aX+b$. Dând lui X valorile 1 și -1 aflăm a și b. Restul este: $2500X+2550$. **43.** -3. **44.** $a=10$. Pentru $X=-9$ avem: $P(10)=-737$. **45.** a) 1; b) -1. **46.** a) $(X-a)(X+a)$; b) $(X-1)(X+1)$; c) $\left(X-\frac{1}{3}\right)\left(X+\frac{1}{3}\right)$; d) $(X-0,1)(X+0,1)$; e) $\left(2X-\frac{1}{13}\right)\left(2X+\frac{1}{13}\right)$; f) $\left(X-\sqrt{2}\right)\left(X+\sqrt{2}\right)$; g) $\left(3X-\sqrt{5}\right)\left(3X+\sqrt{5}\right)$. **47.** a) $X-2$; b) $-X-3$; c) $X+0,2$; d) $X-0,(3)$; e) $X+0,(6)$. **48.** a) $3(X+1)(X-1)$; b) $(2X+1+a)(2X+1-a)$; c) $4X^2(X-1)$; d) $\left(X^2+X-a-b\right)\left(X^2-X-a+b\right)$. **49.** a) $(X-3)^2$; b) $(X-2)(X-4)$; c) $X(X+1)^2$; d) $\left(X^2+2X-1\right)(X+1)^2$; e) $\left(2-X^2+X\right)\left(2+X^2-X\right)$. **50.** a) $(X-a)\left(X^2+aX+a^2\right)$; b) $(X-2)\left(X^2+2X+4\right)$; c) $(X-0,1)\left(X^2+0,1X+0,01\right)$; d) $(3-2X)\left(9-6X+4X^2\right)$; e) $\left(10X-\frac{1}{2}\right)\left(100X^2+5X+\frac{1}{4}\right)$; f) $\left(5X-\frac{1}{3}\right)\left(25X^2+\frac{5}{3}X+\frac{1}{9}\right)$. **51.** a) $(X+a)\left(X^2-aX+a^2\right)$; b) $(X+5)\left(X^2-5X+25\right)$; c) $(2X+1)\left(4X^2-2X+1\right)$; d) $(X+0,1)\left(X^2-0,1X+0,01\right)$; e) $(X+0,2)\left(X^2-0,2X+0,04\right)$; f) $\left(\frac{1}{4}X+\frac{1}{5}\right)\left(\frac{1}{16}X^2-\frac{1}{20}X+\frac{1}{25}\right)$; **52.** a) $(X+1)\left(X^4+1\right)$; b) $(X-1)\left(X^2+1\right)$; c) $(X+2)(X-2)\left(X^2+2X+4\right)$; d) $\left(X^2-X+1\right)^2(X+1)$; e) $(X+3)\left(X^6+X^4-1\right)$; b) $(X-a)(X-b)$; c) $(X+a)(X-b)$. **53.** a) $(X+a)(X+b)$. **54.** a) $(X+4)(X+3)$; b) $(X+4)(X+5)$; c) $(X-3)(X-7)$; d) $(X-5)(X-6)$; e) $(X+1)(X-8)$; f) $(X-1)(X+8)$. **55.** a) $(X+1)\left(X+\sqrt{2}\right)$; b) $\left(X-\sqrt{5}\right)(X+1)$; c) $\left(X-\sqrt{2}\right)\left(X-\sqrt{3}\right)$; d) $\left(X+\sqrt{7}\right)\left(X-\sqrt{7}+1\right)$; e) $\left(X-\sqrt{3}\right)\left(X+\sqrt{3}+1\right)$. **56.** a) $\left(X^2-8\right)\left(X^2+4\right)$; b) $\left(a^2-8\right)\left(a^2+4\right)$ este prim numai dacă $a^2-8=1$, deci $a\in\{-3,+3\}$ caz în care $P(a)=13$. **57.** a) $\left(X^2+16\right)(X-1)(X+1)$; b) $(X+1)\left(X^3-X^2-4\right)$; c) $(X-5)\left(X^3-5X^2-36\right)$. **58.** a) $(X+1-\alpha)(X+1+\alpha)$; b) $(X+1)^3+1=[(X+1)+1]\left[(X+1)^2-(X+1)+1\right]=$

$=(X+2)\left(X^2+X+1\right)$; c) $(X-2-\beta)(X-2+\beta)$; d) $(X-a)^2$; e) $3aX(X+a)$; f) $-3bX(X-b)$. **59.** $5\left(X^2+3x+2\right)$. **60.** $\pm 2(X+1)^2$, $\pm 2(X-1)^2$ și $\pm 2\left(X^2-1\right)$. **61.** a) $P(X)=\left(X^2+2\right)^2$; b) $Q(X)=\left(X^2-X+2\right)^2$; c) Notăm $X^3+2X+6=Y$ și obținem $\left(X^3+2X+5\right)\left(X^3+2X+7\right)+1=(Y-1)(Y+1)+1=Y^2=\left(X^3+2X+6\right)^2$. **62.** a) $P(X)=\left(X^2+X+1\right)^2$; b) $P(\alpha)=\left[\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right]^2\geq\frac{9}{16}$, $(\forall)\alpha\in\mathbf{R}$, egalitatea obținându-se pentru $\alpha=-\frac{1}{2}$. **63.** $P\left(-\sqrt{3}\right)=0; Q\left(1-\sqrt{3}\right)=0$. Aplicăm teorema lui Bézout. **64.** a) $P(X)=(X+1)^2\left(X^2+1\right)$; c) $a=0$. **65.** a) $P(X)=\left(X-\sqrt{5}\right)^2\left(X+\sqrt{5}\right)^2$; b) $Q(X)=\left(X^2+3X+1\right)^2$; c) $\left(X-\sqrt{10}\right)^2\left(X+\sqrt{10}\right)^2$. **66.** $(X+a)\left(X^2+aX-a^2\right)$. **67.** $(X+a)^2(X+a+1)$. **68.** a) 0; b) $(X+a)(X+b)(X+c)$. **69.** a) 0; b) $(X-a)(X-b)(X-c)$. **70.** a) Dacă $\alpha<0$ avem $P(\alpha)<0$ deci α nu poate fi rădăcină; b) 2, 3 și 5; c) $(X-2)(X-3)(X-5)$. **71.** a) 0; b) $P(X)=(X+3)\left(X^2-3X+3\right)$; c) $P(\alpha)=(\alpha+3)\left(\alpha^2-3\alpha+3\right)$. $\alpha^2-3\alpha+3=\left(\alpha-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$ este pozitiv pentru orice $\alpha\in\mathbf{R}$ deci semnul lui $P(\alpha)$ depinde de semnul lui $\alpha+3$. **72.** $a=b=1, c=3, d=-2$. **73.** $a=b=c=0$ sau $a=c=1, b=-1$. **74.** a) Observăm că polinomul este de gradul 4; b) $P(0)=0, P(1)=30, P(-1)=0, P(2)=210$, $P(-2)=30$; c) Folosind a) și b) formăm sistemul: $\begin{cases} e=0 \\ a+b+c+d+e=30 \\ a-b+c-d+e=0 \\ 16a+8b+4c+2d+e=210 \\ 16a-8b+4c-2d+e=30 \end{cases}$ de unde $a=5, b=c=10, d=5, e=0$; d) $P(X)=5X(X+1)\left(X^2+X+1\right)$. **75.** a) $(Q(-2)-2)^2+(Q(6)+2)^2=0$ deci $Q(-2)=2$, $Q(6)=-2$; b) $-\frac{1}{2}X+1$. **76.** c) $n\in\{998, 999\}$. **77.** C.m.m.d.c. $=X^2(X+1)$; c.m.m.m.c. $=X^3(X+1)^2(X-1)^5(X+2)$. **78.** C.m.m.d.c. $=Q(X)$; c.m.m.m.c. $=P(X)$. **80.** $P(X)=X(X-1)(X+1)$. Se arată că Q nu admite ca rădăcină nici unul dintre numerele 0, 1 sau -1. **81.** Punem condițiile $P(1)=0$ și $Q(1)=0$ deci $a=-4, b=-2$, etc. **82.** Deducem că $n\leq m$; c.m.m.m.c. este $X^m(X+1)^m(X+2)^p(X+3)^q$. **84.** a) $n+2$; b) $2n$; c) n^2. **85.** a) P este de gradul I, deci $P(X)=aX+b$. Relația $P(P(X))=X$ devine $a(aX+b)+b=X$. Rezultă $a^2=1$ și $ab+b=0$. Dacă $a=1$ obținem $b=0$ și $P(X)=X$. Dacă $a=-1$, b este arbitrar și $P(X)=-X+b$; b) $R(X)=X+1$; c) Nu există. **86.** a) 2; b) Dăm lui X valoarea 0, apoi valoarea -1 și obținem: $P(0)P(1)=0$; $P(-1)P(0)=0$; c) Presupunem: $P(0)\neq 0$ și rezultă $P(1)=0$, dar $P(1)P(2)=4$ și obținem $0=4$, *absurd*! d) Din $P(0)=0$ rezultă că $P(X)$ se divide cu X deci $P(X)=X(aX+b)$. Obținem $a=\pm 1$ și $b=0$, deci $P(X)=X^2$ sau $P(X)=-X^2$. **87.** Fie x rădăcina întreagă: $x^3-ax-x+2a=0\Rightarrow a(x-2)=x^3-x$. Pentru $x=2$ se obține contradicție, deci $x\neq 2$ și $a=\frac{x^3-x}{x-2}=x^2+2x+3+\frac{6}{x-2}$; $x-2$ este divizor al lui 6, deci $x-2\in$

Scanned with OKEN Scanner

$\in \{-6, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 6\}$, etc. **88.** Notăm cu $Q(X)$ câtul obținut prin împărțirea lui $P(X)$ la $X-n$, iar restul acestei împărțiri este $P(n)$. Deci: $P(X)=(X-n)Q(X)+P(n)$. Pentru $X=m$ avem $P(m)-P(n)=(m-n)Q(m)$. **89.** a) Presupunând că gradele lui $P(X)$ și $Q(X)$ ar fi diferite, dacă de exemplu am avea grad $P(X)>$ grad $Q(X)$, din faptul că grad $(P(X)+Q(X))=2$ ar rezulta grad $P(X)=2$, grad $Q(X)\le 1$ deci grad $(P(X)Q(X))\le 2$, *contradicție*; b) Fie grad $P(x)=$ grad $Q(x)=n$. Din $4<2n<8$ rezultă $n=3$. Grad $(P(X)Q(X))=6$; c) $P(X)=aX^3+bX^2+cX+d$; $Q(X)=a'X^3+b'X^2+c'X+d'$. Cum grad $(P(X)+Q(X))=2$ rezultă $a'=-a$; deci câtul împărțirii celor două polinoame este -1. **90.** Notăm: $Q(X)=P(X)-100$. Din faptul că $Q(1)=Q(2)=0$ rezultă că polinomul $Q(X)$ este de forma: $Q(X)=(X-1)(X-2)T(X)$ unde $T(X)$ este un polinom cu coeficienți întregi. Rezultă că pentru orice $a\in\mathbf{Z}$, $P(a)=(a-1)(a-2)T(a)+100$ este număr par deci nu poate lua valoarea 1995. **92.** a) 0; b) 2; c) $P(X)=X(X-1)$.

CAP. V. ◆ FRACȚII RAȚIONALE ◆

1. $\frac{X-1}{X+1}$; b) $\frac{1-X}{1+X}$; c) $\frac{X^4+1}{X+1}$; d) $\frac{X+3}{X+4}$; e) $\frac{X-1}{X^2-X+1}$; f) $\frac{X-12}{X^2-2}$. **2.** a) $\frac{X+3}{X^2-5X+25}$; b) $\frac{X^2-7X+19}{X^2-X+1}$; c) $\frac{7-X}{X^2+3X+9}$; d) $\frac{1-3X}{X^2+X+1}$. **3.** b) $\frac{4}{1-X}$; c) $a\in(1,\infty)$. **4.** a) $\frac{X+1}{X^2+1}$; b) $\frac{X+1}{X^3-X+1}$; c) $\frac{X^2+X+1}{X-1}$; d) $\frac{X+3}{X^4-X+1}$. **5.** a) $a\in\mathbf{R}-\{1\}$; b) $\frac{X^2+1}{X^2+2}$; c) nu, pentru că $\frac{a^2+1}{a^2+2}\in(0,1), (\forall)a\in\mathbf{R}$. **6.** a) $\frac{X+7}{2X+3}$; b) $\frac{Y-3}{3Y-7}$; c) $\frac{X^2+4X+3}{X^2-5}$. **7.** a) 1 și $\frac{7}{3}$; b) $\frac{2X-8}{3X-7}$; c) $a\in\left(-\infty;\frac{7}{3}\right)$. **8.** a) $\frac{\sqrt{2}}{X+1}$; b) $X^2-X\left(\sqrt{2}+\sqrt{5}\right)+\sqrt{10}$. **9.** $a=4$ sau $a=\frac{31}{4}$. **10.** $a=b=1$. **11.** a) $\frac{2X}{X^2-1}$; b) 0; c) $\frac{2}{X-2}$; d) $\frac{5}{9-X^2}$; e) $\frac{X-1}{X^2+X+1}$; f) 16; g) 16; h) $\frac{X^2}{(X+1)^2}$; i) Se simplifică mai întâi fiecare fracție. Obținem $\frac{-3}{(X+4)(X+5)}$. **12.** b) $\frac{X^2}{X^4+1}$; c) $F(a)=\frac{1}{3}$. **13.** $\alpha=-1$; $E(-1)=101$. **14.** a) $\frac{X^2-4X+3}{X+1}$; b) $\frac{1}{X^2-1}$; c) $\frac{X^2-7X+10}{2X}$; d) $\frac{16X^2-8X-3}{16X^2+8X-3}$; e) $\frac{X^2+1}{X^2+5X}$; f) $\frac{X-1}{X+1}$; g) $\frac{X-1}{X+1}$; h) $\frac{4X^2-12X}{X+5}$. **15.** a) $-\frac{13}{6}$ și 1; b) $\frac{6X-13}{X-1}$; c) 0. **16.** a) $\frac{2X+2}{X-1}$; b) $\frac{2}{X^2+X+1}$; c) $\frac{3}{X+2}$; d) $\frac{X^3}{X^2+1}$; e) $\frac{2}{X}$; f) $\frac{1}{X-2}$; g) $X+1$. **17.** a) $\frac{1}{4X}$; b) 1; c) $\frac{-4nX}{(X+n)^2}$. **18.** a) 1; b) 0. **19.** $B(X)=A^2(X)-2$ și $C(X)=A(X)(B(X)-1)$ deci $B(\alpha)=7$, $C(\alpha)=18$. **20.** a) $\frac{a^2+aX^2+a^2}{a-2}$; b) 1; c) $\frac{(X-a)(X+1)}{X+a}$. **21.** 1. **22.** a) $a\in\mathbf{R}-\{-1,1\}$; b) $A=\{-2;2\}$, $B=\{0\}$. **23.** a) X^2+2; b) 1. **25.** a) $\frac{X-1}{X+10}$; b) $\frac{X+101}{X}$; c) $\frac{(X-1)(X+101)}{X(X+100)}$. **26.** X^2+4X+3. **27.** a) $a=\frac{1}{2}$, $b=-\frac{1}{2}$; b) $a=c=\frac{1}{2}$, $b=-1$. **28.** $m=\frac{2}{3}$, $n=\frac{1}{3}$, $p=-\frac{1}{3}$.

Scanned with OKEN Scanner

29. a) $\frac{3}{X^2+3X}$; b) $\frac{4}{X^2+10X+9}$. **30.** b) $n \in \{-5, 3, -1\}$. **31.** $\frac{4\sqrt{2}}{X}$. **33.** $\frac{X^2}{(X-1)^2}$. **34.** $F(a)=0$. **35.** $A = \mathbf{R} - \{-1, -2, -3\}$. **36.** a) $\alpha = 1$; b) $\frac{X+1}{X-1}$; c) $p \in (-\infty, 0)$. **37.** Observând că $\sqrt{4-\sqrt{15}} = \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$, obținem $\alpha = 2, a = 12, b = -8, c = -8, d = 12$. **38.** a) $\frac{X^2+X+7}{X^2-4X+4}$.

39. $a = 5, b = 7, c = -10, d = -5$. **40.** a) $F(X) = \frac{X^3 - X^2\left(\sqrt{2}+1\right) + X\left(\sqrt{2}+1\right) - \sqrt{2}}{X^3 - X^2\left(\sqrt{2}-1\right) + X\sqrt{2}\left(\sqrt{2}-1\right) - 2\sqrt{2}}$.

Observând că polinoamele de la numărător și de la numitor admit rădăcina $\sqrt{2}$, descompunem aceste polinoame în factori și obținem: $F(X) = \frac{\left(X-\sqrt{2}\right)\left(X^2-X+1\right)}{\left(X-\sqrt{2}\right)\left(X^2+X+2\right)} = \frac{X^2-X+1}{X^2+X+2}$; b) $F(x) < 2 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x^2+3x+3>0 \Leftrightarrow \left(x+\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$; c) Deoarece $F(x) \in (0; 2)$, $F(x)$ nu poate fi număr natural decât dacă $F(x) = 1$, deci pentru $x = -\frac{1}{2}$. **41.** a) $F(X) = \frac{X^3-3X^2+2X+1}{X} = X^2 - 3X + 2 + \frac{1}{X}$ deci $\{x \in \mathbf{Z} \mid F(x) \in \mathbf{Z}\} = \{1, -1\}$; b) $F(x) = \frac{x(x-1)(x-2)+1}{x}$ de unde rezultă că $F(x) > 0$ oricare ar fi $x \geq 2$. $F(x) = \left(x-\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{4-x}{4x}$ de unde rezultă că $F(x) > 0$ oricare ar fi $x \in (0, 2)$.

CAP. VI. • INTRODUCERE ÎN GEOMETRIA ÎN SPAȚIU •

• Puncte • Drepte • Plane •

1. 109. **2.** $\frac{n(n-1)}{2}$. **3.** 3. **4.** 6. **5.** 3. **6.** $M \in (ABC)$, $D \in (ABC)$, $N \in (ABC)$, $M \in \alpha$, $N \in \alpha$, $D \in \alpha$; M, D, N sunt coliniare pentru că aparțin intersecției planelor α și (ABC), care este o dreaptă. **7.** Presupunând prin absurd că dreptele AA' și BB' sunt coplanare obținem că dreptele d și d' sunt coplanare. *Contradicție*! **8.** $(ABC) \cap \alpha = AD$ și $M \in AD$, deci A, M, D sunt coliniare. **9.** Presupunând prin absurd că punctele A, B, C, D sunt coplanare obținem că BD este coplanară cu d ceea ce este o contradicție cu ipoteza. **10.** $(PAC) \cap (PBD) = PO$ unde $\{O\} = AC \cap BD$. **11.** Punctul fix prin care trece dreapta $A'B'$ este punctul de intersecție al dreptei AB cu planul α. **12.** Punctul fix prin care trece dreapta MM' este punctul de intersecție al dreptei AB cu planul α. **13.** a). Medianele triunghiului BCD sunt concurente în centrul G de greutate al acestui triunghi. Planele determinate de A și de medianele triunghiului BCD au dreapta comună AG. b) Fie H ortocentrul triunghiului BCD. Dreapta comună este AH. **14.** Planul cercului se intersectează cu planul α după dreapta a care este tangenta în A la cerc. Dreptele b și c sunt incluse în planul cercului, iar $P, Q \in a$. **15.** Punctul fix este intersecția dreptei date cu planul dat. **16.** Fie $d \cap (ABC) = \{P\}$. Avem $(d, A) \cap (d, B) \cap (d, C) = AP \cap BP \cap CP = \{P\}$. ***Observație***: Dacă d este paralelă cu planul determinat de A, B, C atunci concluzia problemei este falsă. **17.** 84. **18.** $(M, d_1) \cap (M, d_2) = MO$, unde $\{O\} = d_1 \cap d_2$. Punctul M fiind mobil pe d_3 și punctul O fiind fix, planul generat este (O, d_3). **19.** Fie d_1, d_2 dreptele necoplanare date și M punctul dat. Notăm $\alpha = (M, d_1)$; dacă există $\{N\} = d_2 \cap \alpha$, dreapta MN satisface con-

Scanned with OKEN Scanner

dițiile din enunț. Presupunând că ar exista două drepte care satisfac ipotezele problemei se obține că dreptele date ar fi conținute în planul determinat de aceste două drepte, deci contradicție deoarece dreptele date sunt necoplanare. **20.** Fie d_1, d_2, d_3 dreptele date și $M \in d_3, \alpha = (M, d_2)$; dacă $d_1 \cap \alpha = \{N\}$ și $MN \cap d_2 = \{P\}$ dreapta căutată este MN. **21.** Dreapta este chiar BA, dacă $BA \nparallel d$. **22.** Fie d_1 și d_2 dreptele date și α planul dat, iar $\{A\} = d_1 \cap \alpha$, $\{B\} = d_2 \cap \alpha$. Planele (B, d_1) și (A, d_2) se intersectează după dreapta $AB \subset \alpha$. **23.** $\alpha \cap \beta \cap \gamma = \{A\}$. **24.** Configurația formată de 4 puncte necoplanare corespunde cerințelor problemei. Numărul dreptelor este 6, iar al punctelor 4. **25.** Fie d_1, d_2, d_3 trei drepte din mulțimea M. Conform proprietăților din enunț rezultă că aceste 3 drepte determină un plan, fie acesta α. Dacă $d_i \in M$, $i \in \mathbf{N}$, $i > 3$, rezultă $d_i \subset \alpha$. **26.** Fie $\{A\} = \alpha \cap \beta \cap \gamma$; dacă presupunem că $A \in \alpha \cap \beta$, rezultă $\alpha = \beta$, atunci însă $\gamma \cap \beta = \gamma \cap \alpha$ și intersecția este o dreaptă (sau un plan) ceea ce reprezintă o contradicție cu ipoteza $\{A\} = \alpha \cap \beta \cap \gamma$. Dreptele de intersecție sunt concurente în A, presupunerea că ele ar fi coplanare contrazice de asemenea $\{A\} = \alpha \cap \beta \cap \gamma$. **27.** Evident în M sunt cel puțin trei drepte. Dacă M ar conține exact trei drepte d_1, d_2, d_3 și $d_1 \cap d_2 = \{A\}$ atunci $d_3 \cap d_1 = \{A\}$, deoarece în caz contrar ar rezulta că $d_3 \subset \alpha = (d_1, d_2)$, contradicție cu ipoteza. Prin urmare $d_1 \cap d_2 \cap d_3 = \{A\}$. Presupunând acum că M ar conține d_n $(n \in \mathbf{N}, n > 3)$, drepte, folosind același raționament se arată că pentru orice, d_i, $i \in \mathbf{N}$, $i > 3$, $d_i \in M : d_i \cap d_1 \cap d_2 = \{A\}$. **28.** M, N, P aparțin dreptei $d = \alpha \cap \beta$, deci sunt coliniare. **29.** Fie $ABCD$ patrulaterul strâmb $(C \notin (ABD))$ și M, N, P, Q respectiv mijloacele laturilor $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ și $[DA]$. $(M, CD) \cap$ $\cap (P, AB) = MP$, $(N, AD) \cap (Q, BC) = NP$. Dar $MNPQ$ este paralelogram și $MP \cap NQ = \{O\}$, O fiind centrul paralelogramului care este punctul de intersecție a planelor respective. **30.** Locul geometric al punctelor M' este format din intersecția planului α cu planul (A, d). Dacă $d \parallel \alpha$, locul geometric este o paralelă la d dusă prin A. Dacă $d \cap \alpha = \{B\}$, $B \neq A$, locul geometric este dreapta AB. În cazul particular $d \cap \alpha = \{A\}$, locul geometric este punctul A. **31.** Raționamentul analog de la problema 27. **32.** $\alpha = (d, g)$, $A \in d \subset \alpha$, $B \in g \subset \alpha \Rightarrow A \in \alpha$, $B \in \alpha \Rightarrow AB \subset \alpha$, $(\forall) M \in \alpha \Rightarrow [AM] \subset \alpha$.

CAP. VII. • PARALELISM ÎN SPAȚIU •

1. a) A_1B_1 este linie mijlocie în triunghiul DAB, iar A_1C_1 este linie mijlocie în triunghiul DAC; obținem $(A_1B_1C_1) \parallel (ABC)$. Analog $(A_2B_2C_2) \parallel (ABC)$, deci $(A_1B_1C_1) \parallel (A_2B_2C_2)$; b) $(A_1B_1C_1) \parallel (A_2B_2C_2)$ și deoarece $[A_1A_2]$ este linie mijlocie în triunghiul ADE, avem: $A_1A_2 \parallel DE$; $DE \parallel (A_1B_1C_1) \Rightarrow A_2 \in (A_1B_1C_1)$. Analog $B_2, C_2 \in (A_1B_1C_1)$. **2.** $[ON]$ este linie mijlocie în triunghiul AMC, deci $CM \parallel ON$; dar $ON \subset (BND)$ și prin urmare $CM \parallel (BMD)$. **3.** Fie P și Q respectiv mijloacele segmentelor $[AB]$ și $[AC]$; atunci $(NPQ) \parallel (BCD)$. Ducem $EE' \parallel$ $\parallel FF'$, $E' \in [AC]$ și $F' \in [AB]$. În trapezul $EE'FF'$, PQ este linie mijlocie și va conține mijlocul M al diagonalei $[EF]$; deci: $MN \subset (NPQ) \Rightarrow MN \parallel (BCD)$. **4.** a) PQ este linie mijlocie în trapezul $ABCD$, iar RS este linie mijlocie în trapezul $ABEF$, deci $PQ \parallel AB \parallel RS$. b) $CD = EF$. **5.** $AEFG$ este paralelogram, deci $AM = ME$, $AN = ND \Rightarrow MN$ este linie mijlocie în triunghiul AED, deci $MN \parallel DE, DE \subset$ $\subset (BCD)$ prin urmare $MN \parallel (BCD)$. **6.** $M \in (MAB) \cap (MEF)$, $EF \parallel AB \Rightarrow (MAB) \cap (MEF) =$ $= MX$, $MX \parallel AB$. Analog $(MAB) \cap (MCD) = MY$; $MY \parallel AB$, deci $MX = MY$ și $(MAB) \cap (MEF) \cap$ $\cap (MCD) = MX$. **7.** $[CM]$ este mediană în triunghiul ACD, $CM \cap AD = \{P\}$; BN este mediană în triunghiul ABD, $BN \cap AD = \{P\}$. În triunghiul PBC avem egalitățile: $\frac{PM}{MC} = \frac{PN}{NB} = \frac{1}{2}$, deci $MN \parallel BC$, (1). Fie $DN \cap AB = \{R\}$ și $DL \cap BC = \{S\}$; $\frac{DN}{NR} = \frac{DL}{LS} = \frac{2}{1}$ rezultă că $NL \parallel RS$, (2). Relațiile (1) și (2) conduc la $(MNL) \parallel (ABC)$. **8.** Fie M mijlocul segmentului $[BC]$ și M' mijlocul seg-

mentului $[B'C']$; avem O, $M'M$, coliniare. În triunghiurile asemenea $OA'M'$ și AOM, având $\frac{A'G'}{G'M'} = \frac{AG}{GM} = \frac{2}{1}$, obținem că $\Delta OA'G' \sim \Delta OAG$, deci $\sphericalangle A'OG' \equiv \sphericalangle AOG$, prin urmare O, G, G' sunt coliniare. **9.** Planul este determinat de punctul P și de o tangentă dusă la cercul dat, paralelă cu dreapta d. Există două plane care satisfac condițiile din enunț. **10.** Cele două plane paralele se obțin ducând printr-un punct fix oarecare al dreptei d_1 o paralelă la dreapta d_2 și printr-un punct oarecare al dreptei d_2 o paralelă la dreapta d_1. **11.** $[MN]$ este linie mijlocie în triunghiul BCD, deci $MN \parallel BD$, (1). $[MP]$ este linie mijlocie în triunghiul BCQ, deci $MP \parallel BQ$, (2). Din (1) și (2) rezultă $(MNP) \parallel \parallel (BQD)$. **14.** Dacă a și b înțeapă planul α sau dacă $a \parallel \alpha$ problema nu admite soluție. În cazul $b \parallel \alpha$, planul cerut se construiește astfel: printr-un punct oarecare al dreptei b se duce o paralelă la o dreaptă oarecare conținută în α. Aceste două drepte determină planul β. Într-adevăr vom avea $\alpha \parallel \beta$ și deoarece $a \cap \alpha \neq \emptyset$, avem $a \cap \beta \neq \emptyset$. **15.** Fie $a = \alpha_1 \cap \alpha_2$; dreptele t_1, t_2 tangente la cercurile ζ_1, respectiv ζ_2 se construiesc paralele cu a. **16.** Prin A' ducem $d_1 \parallel d$ și apoi $BB_1 \parallel AA'$, $B_1 \in d_1$, $CC_1 \parallel AA'$, $C_1 \in d_1$. Vom avea $\frac{AB}{AC} = \frac{A'B_1}{A'C_1} = \frac{A'B'}{A'C'}$, deci $B_1B' \parallel C_1C'$. Planul (BB_1B') este paralel cu dreptele AA', BB', CC'. **17.** $CE \parallel AB$; $\Delta ABD \equiv \Delta CED$ rezultă $BD = ED$ și având $AD = CD$ obținem că $ABCE$ este paralelogram. **18.** a) Unghiurile respective sunt $\sphericalangle NMP$ și $\sphericalangle MNP$, unde P este mijlocul segmentului $[AC]$; b) $AB = CD$. **19.** $(MAB) \cap \beta = A_1G_1$, $(MAB) \cap \cap \alpha = AB$, $\beta \parallel \alpha \Rightarrow A_1B_1 \parallel AB$; $(MCD) \cap \beta = C_1D_1$, $(MCD) \cap \alpha = CD$, $\beta \parallel \alpha \Rightarrow C_1D_1 \parallel \parallel CD$. $AB \parallel CD \Rightarrow A_1B_1 \parallel C_1D_1$. Analog se arată că $A_1D_1 \parallel B_1C_1$. **20.** Fie $MN \cap \alpha = \{O\}$, A_1 și B_1 sunt simetrice față de O, C_1 și D_1 sunt simetrice față de O (în trapezele, ABB_1A_1 respectiv CDD_1C_1, MO respectiv NO sunt linii mijlocii). Deci $A_1D_1B_1C_1$ este paralelogram. **23.** a). Presupunem prin absurd că $\alpha \cap \beta = c$. $a \subset \alpha$, $a \parallel \beta \Rightarrow a \parallel c$, (1), $b \subset \beta$, $b \parallel \alpha \Rightarrow b \parallel c$, (2). Relațiile (1) și (2) contrazic ipoteza 3); b) Prin dreapta a ducem un plan γ care intersectează β după dreapta a'. $a' \parallel a$ deoarece $a \parallel \beta$, $a' \subset \beta$, $a' \parallel \alpha$; $b \subset \beta$, $b \parallel \alpha$, a' și b necoplanare implică $\alpha \parallel \beta$. **24.** Dreapta comună este paralela prin A la d. **25.** Fie cele trei drepte oarecare a, b, c. Printr-un punct $A \in a$ ducem $b' \parallel b$ și printr-un punct oarecare $B \in b$ ducem $a' \parallel a$. Notăm $\alpha = (a, b')$, $\beta = (a', b)$; vom avea $\alpha \parallel \beta$. Trebuie atunci ca prin C să se poată construi un plan γ paralel cu α sau cu β. De aici rezultă că, condiția ca prin trei drepte să poată fi construite trei plane paralele este ca una dintre drepte să fie paralelă cu planul paralel cu celelalte două. **26.** $[MN]$ este linie mijlocie în triunghiul BPC, deci $MN \parallel \parallel BC$; fie M_0 și N_0 intersecțiile lui MN respectiv cu AB și AC, iar Q intersecția lui MN cu AE. Avem $QM = QN$ și $MM_0 = NN_0$. Deoarece $BE = EC$, $M_0N_0 \parallel BC$, avem $\frac{M_0M}{BE} = \frac{NN_0}{EC} = \frac{M_1M}{M_1E} = \frac{N_1N}{N_1E}$ și cu reciproca teoremei lui *Thales* obținem $M_1N_1 \parallel MN$, $M_1N_1 \parallel BC$, $BC \subset \subset (BCD) \Rightarrow M_1N_1 \parallel (BCD)$. **27.** $AB \parallel CD \Rightarrow \Delta ABQ \sim \Delta CDQ \Rightarrow \frac{AB}{CD} = \frac{AQ}{CQ} = \frac{2}{7}$, (1). $AB \parallel EF \Rightarrow \Delta ABP \sim \Delta FEP \Rightarrow \frac{AP}{PF} = \frac{AB}{EF} = \frac{AB}{CD} = \frac{2}{7}$, (2). Relațiile (1) și (2) conduc la $QP \parallel CF$. Avem: $\frac{AQ}{AC} = \frac{QP}{CF} \Rightarrow QP = \frac{28}{9}$ cm. **28.** Fie OZ dreapta de intersecție a planelor $(A; OX)$, $(B; OY)$; $AM = (A; OX) \cap \beta$, $BN = (B; OY) \cap \beta$, $AM \parallel BN \Leftrightarrow OZ \parallel \beta$. Deci pentru a construi planul β se duce printr-un punct oarecare al dreptei AB o paralelă la OZ; β va fi determinat de AB și această paralelă. Pentru ca patrulaterul $AMHB$ să fie paralelogram trebuie ca $AB \parallel \alpha$. **29.** Dacă $M_1N_1N_2M_2$ este paralelogram atunci $M_1M_2 \parallel N_1N_2 \parallel a$. Dacă $M_1N_1 < M_2N_2$ (M_1N_1 N_2M_2 este trapez), fie $N_1N_2 \cap a = \{P\}$; atunci $M_1M_2 \cap a = \{P\}$ deoarece dreapta a intersectează planul

Scanned with OKEN Scanner

$M_1N_1N_2M_2$ într-un singur punct. **30.** [MP] este linie mijlocie în triunghiul ANC, deci $MP \parallel AN$, (1) [NQ] este linie mijlocie în triunghiul BMP, deci $NQ \parallel MP$, (2). Din (1) și (2) avem A, N, Q coliniare, prin urmare A, N, Q, D sunt coplanare; $MP \parallel AQ$, $AQ \subset (AND) \Rightarrow MP \parallel (AND)$. **31.** Se construiește prin O o paralelă a la d, iar în planul α o tangentă b paralelă cu d. Planul β este planul determinat de dreptele paralele a și b. Există două plane β pentru că la cercul dat se pot construi două tangente paralele cu d. **32.** [KL] este linie mijlocie în triunghiul DBF, deci $KL \parallel DF$. Patrulaterul $CDFE$ este paralelogram, deci $DF \parallel CE$ și prin urmare $KL \parallel CE$. În triunghiul dreptunghic AHB, [HK] este mediană, deci: $HK = KB \Rightarrow \measuredangle KHB \equiv \measuredangle KBH$; însă $\measuredangle KBH \equiv \measuredangle CAB$ prin urmare $\measuredangle KHB \equiv \measuredangle CAB$ și dreptele KH și CA sunt paralele. Având $KL \parallel CE$ și $HK \parallel AC$ obținem că $(HKL) \parallel (ACE)$. Dreapta KL este paralelă cu planul (CFE). **33.** Dreapta de intersecție a planelor (PAB) și (PCD) este paralelă cu AB, de asemenea MN este paralelă cu AB prin urmare MN este coplanară cu dreapta de intersecție a planelor (PAB) și (PCD). **34.** Dacă $b \cap \alpha = \{A\}$ și $b \cap \beta = \{B\}$ planul γ este determinat de b și de paralela dusă prin A (sau prin B) la dreapta a. **35.** a) Dacă prin absurd am presupune că punctele A, B, C, D sunt coplanare atunci D ar aparține planului determinat de dreptele d și d_1 și BD va fi inclusă în acest plan ceea ce ar constitui o contradicție cu ipoteza BD nesituată în același plan cu d; b) [PQ] este linie mijlocie în triunghiul ACD, deci $PQ \parallel AC$ și $PQ = \frac{1}{2}AC$. [MN] este linie mijlocie în triunghiul IJK, deci $MN \parallel IJ$ și $MN = \frac{1}{2}IJ$; însă $IJ = = AC$ și $IJ \parallel AC$, deci $MN \parallel AC$ și $MN = \frac{1}{2}AC$, prin urmare $MNPQ$ este paralelogram. **38.** Triunghiurile ABD și ACD sunt triunghiuri echilaterale congruente, deci J și I sunt și centre de greutate în aceste triunghiuri, (1). Notăm $BK \cap CD = \{N\}$; K și I sunt centre de greutate în triunghiurile echilaterale BDC și ADC și avem: $\frac{NK}{NB} = \frac{NI}{NA} = \frac{1}{3}$, deci $KI \parallel AB$, (2). Relațiile (1) și (2) implică $(IJK) \parallel (ABC)$. **39.** $AN = 4$ cm. **40.** Notăm cu E' intersecția dreptei AE cu BC și cu F' intersecția dreptei AF cu BD. [EF] este linie mijlocie în triunghiul $AE'F'$, deci $EF \parallel E'F'$; $E'F' \subset (BCD)$ rezultă $EF \parallel (BCD)$.

CAP. VIII. • PERPENDICULARITATE ÎN SPAȚIU •

1. $A_{\Delta ABC} = 12$. **2.** $A_{\Delta ABC} = 8\sqrt{3}$. **3.** $d = \frac{12}{13}$. **4.** $MN = 4$. **5.** $MN = 3\sqrt{3}$. **6.** $A = \frac{x^2\sqrt{67}}{8}$. **8.** $P_{ABC} = 6\left(3+\sqrt{5}\right)$ cm; $S_{ABC} = 18\sqrt{5}$ cm^2; $d_1 = 6$, $d_2 = 6$, $d_3 = 2\sqrt{29}$, $d_4 = 9$. **9.** $d(E,AB) = d(E,AD) = 5$; $d(E,DC) = d(E,BC) = 2\sqrt{13}$ etc. **10.** a) $AC \perp AB, AC \perp BM \Rightarrow AC \perp$ $\perp (ABM)$; b) $MA = 2a, MC = a\sqrt{5}$. **11.** Se arată că $EC \perp (DAB)$, deci $EC \perp DB, EF \perp DB \Rightarrow BD \perp$ $\perp (CEF)$. **12.** $DA \perp BA, DA \perp PB \Rightarrow DA \perp (PBA)$. $DA \subset (PAD) \Rightarrow (PBA) \perp (PAD)$, $BF \perp PA \Rightarrow$ $\Rightarrow BF \perp (PAD)$, $PD \subset (PAD) \Rightarrow PD \perp BF$, (1); mai avem și $BE \perp PD$, (2). Din (1) și (2) se obține $PD \perp (BEF)$. **13.** $\{O\} = AC \cap BD \Rightarrow MO = \frac{10+6}{2} = 8$ și $NO = 3$. Cum $MO \perp (ABC)$ și $NO \perp$ $\perp (ABC) \Rightarrow M, N, O$ coliniare. Obținem $MN = MO - NO = 5$. **14.** $CF \perp AB, AE \perp (ABC) \Rightarrow CF \perp$ $\perp (AEB)$. $FG \perp EG \overset{T_3P}{\Rightarrow} CG \perp EG \Rightarrow EG \perp (CFG)$. **15.** $MNPQ$ paralelogram. Dacă $(MP) \equiv (NQ)$ atunci: $MNPQ$ este dreptunghi $\Rightarrow MN \perp NP \Rightarrow AC \perp BD$. Dacă $AC \perp BD$ atunci: $MNPQ$ este dreptunghi rezultă $(MP) \equiv (QN)$. **16.** Fie $M'M \perp (ABC) \overset{T_3P}{\Rightarrow} M'C \perp AC$ și $M'B \perp AB$ și cum $m(\measuredangle A) = 90° \Rightarrow$ $\Rightarrow ABM'C$ este dreptunghi deci P este mijlocul segmentului CD și este tocmai intersecția diagonalei AM' cu CB. În $\Delta AMM'$, NP linie mijlocie $\Rightarrow NP \parallel MM'$ și cum $MM' \perp (ABC) \Rightarrow NP \perp (ABC)$. **17.**

Scanned with OKEN Scanner

Fie A' piciorul înălțimii din A. Conform T_3P, $A'C \perp CD$ și $A'B \perp BD$, deci în patrulaterul $DBA'C$ avem: $m(\sphericalangle DBA') + m(\sphericalangle A'CD) = 180° \Rightarrow A$ aparține cercului circumscris triunghiului BCD. **20.** a) Fie $CP = x$, M', N' proiecțiile punctelor M, N pe dreapta CP; avem $MM' = a$, $NN' = 2a$, $PM' = |x - 2a|$, $PN' = |x - 3a|$, $MP^2 = a^2 + (x - 2a)^2$, $NP^2 = 4a^2 + (x - 3a)^2$; $MP = NP \Rightarrow$ $\Rightarrow CP = x = 4a$. b) Fie O centrul lui $ABCD$ și O' mijlocul lui $[MN]$; $OO' = \frac{5a}{2}$. Se obține $AQ = a$. **21.** Fie $ES \perp AD$, $S \in AD$; $EF \perp (ABC) \Rightarrow FS \perp AD$. Deci $d(F, AD) = FS = \sqrt{EF^2 + ES^2}$. $ES = \frac{2S_{ADE}}{AD} = \frac{240}{10} = 24 \Rightarrow FS = 25$ cm. **22.** Fie AA' înălțimea din A în ΔABC. $BC \perp AA'$, $BC \perp A'O \Rightarrow BC \perp (AA'O) \Rightarrow (ABC) \perp (AA'O)$. Fie BD înălțimea din B în ΔABC și BB' înălțimea din B în ΔOBC. $OA \perp BB'$; $BB' \perp OC \Rightarrow BB' \perp OC \Rightarrow HH' \perp (ABC)$. **23.** a) $AD = BC = x \Rightarrow MB = 2x$, $MC = x\sqrt{3}$, $AM = AB = x\sqrt{2}$. În ΔMAD: $x = 2a$. Construim $DN \perp AC$ și $d(M, AC) = MN = \frac{2a\sqrt{15}}{3}$; b) $d(D, (MAC)) = DP = \frac{2a\sqrt{10}}{5}$. **24.** $d(M, BC) = d(M, DC) = CM = 5\sqrt{3}$. Fie $C_1E \perp AB$, $E \in AB$; atunci: $ME \perp AB$, $AF \perp DC \Rightarrow DF = \frac{5}{2} \Rightarrow m(\sphericalangle DAF) = 30° \Rightarrow AF = \frac{5\sqrt{3}}{2} = CE \Rightarrow ME = 5\frac{\sqrt{15}}{2}$. Analog $MA = d(M, AD) = 5\sqrt{6}$. **25.** Dreapta de intersecție a celor două plane este BP, $\{P\} = MN \cap AC$. Construim $AQ \perp BP$; $MQ = d(M, BP)$, $CN \parallel MA \Rightarrow \frac{CN}{MA} = \frac{PC}{PA} \Rightarrow CP = 2\sqrt{3} \Rightarrow AP = 6\sqrt{3}$, $BP = 12$, $AQ = 3\sqrt{3}$ și $d(M, BP) = MQ = 6$. **26.** Fie $OP \perp (ABC)$, $P \in (BC)$ și $PQ \perp AC$, $Q \in AC$; atunci: $OQ = d(O, AE)$, $OP = \frac{a}{2}$, $PQ = a \cdot \frac{\sqrt{2}}{4}$, $OQ = \frac{a\sqrt{6}}{4}$. **27.** a) Ducem $DR \perp BC$, $d(M, BC) = MR = \frac{a\sqrt{7}}{2}$; b) $d(P, AC) = PO = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. **28.** a) $d(M, (ABC)) = MM' = \frac{3a\sqrt{2}}{4}$; b) Ducem $M'N \perp AB$, $M'A = DA - DM' = \frac{a\sqrt{2}\left(2 - \sqrt{3}\right)}{4}$, $M'N = \frac{a\left(2 - \sqrt{3}\right)}{4}$, $MN = \frac{a\sqrt{25 - 4\sqrt{3}}}{4}$, $A_{MAB} = A_{MAC} = \frac{a^2\sqrt{25 - 4\sqrt{3}}}{8}$; c) $d(A, (MBC)) = \frac{a\sqrt{6}}{4}$. **30.** Fie D mijlocul lui $[BC]$; $AO = 2\sqrt{6}$, $OD = \sqrt{6}$, $OM^2 = AO \cdot OD$. Distanța este: $DM = 3\sqrt{2}$ cm. **31.** $AC = 16$, $AD = 9$. *Cazul* 1: $M_1 \in (AC) \Rightarrow BM_1 = d(B, M_1D_1)$. *Cazul* 2: $A \in (M_2C) \Rightarrow BE = d(B, M_2D)$, E este piciorul perpendicularei din A pe dreapta M_2D, $BE = BM_1 = \frac{3\sqrt{73}}{2}$. **32.** $AB \parallel DC \subset (DCB_1) \Rightarrow AB \parallel (DCB_1)$, $M \in AB \Rightarrow d(M, (DCB_1)) = d(B, (DCB_1))$; $DC \perp BC$, $DC \perp BB_1 \Rightarrow DC \perp (BB_1C)$, $DC \subset (DCB_1) \Rightarrow (DCB_1) \perp (BB_1C) \Rightarrow d(B, (DCB_1)) = BT$, $T \in B_1C$, $BT \perp B_1C$. $BT = \frac{BC \cdot BB_1}{B_1C} = \frac{a \cdot b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$. **33.** a) $GC^2 = GD^2 + DC^2 \Leftrightarrow x = a$; b) $AB \parallel DC$ și $DC \parallel EF \Rightarrow AB \parallel (GEF) \Rightarrow d[B, (EFG)] = d(A, (EFG))$. $EF \perp DF$ și $EF \perp AD \Rightarrow EF \perp (ADF) \Rightarrow (GEF) \perp (GDF) \Rightarrow d(A, (GFE)) = AH$, H fiind poiecția lui A pe $GF = (GDF) \cap (GEF)$. Se obține $AH = \frac{a\sqrt{5}}{5}$. **34.** Construim prin O planul (EFG) încât $(EFG) \parallel (BCC')$, $E \in (AB)$, $F \in (CD)$, $G \in (C'D')$; $(EFG) \perp (ABC'D) \Rightarrow$

Scanned with OKEN Scanner

$\Rightarrow d[O,(ABC')]=OH$, unde H este proiecția lui O pe dreapta EG; $OH=\frac{a\sqrt{2}}{4}$. **35.** Construim $MN\perp(ABE)$, $N\in AF$; $(DAF)\perp(ABE)$, $MN\parallel DA$, $DA\subset(ABC)\Rightarrow MN\parallel(ABC)\Rightarrow MN=20$, $NA=6$. **38.** $CF\perp AB$, $CF\perp AE\Rightarrow CF\perp(ABE)\Rightarrow CF\perp BE$, (1). Mai avem că $BE\perp FG$, (2). Din (1) și (2): $BE\perp(CFG)$. **39.** $DA\perp BA$, $DA\perp PB\Rightarrow DA\perp(PBA)\Rightarrow(PBA)\perp(PAD)$, $BF\perp PA\Rightarrow BF\perp(PAD)\Rightarrow PD\perp BF$, (1). Mai avem $BE\perp PD$, (2). Din (1) și (2): $PD\perp(BFE)$. **40.** Dacă unul din P sau Q aparține planului (ABC), el este centrul cercului circumscris ΔABC și celălalt nu aparține planului $(ABC)\Rightarrow PQ\perp(ABC)$. Dacă P și Q sunt exterioare planului $(ABC)\Rightarrow PO\perp(ABC)$ și $QO\perp(ABC)\Rightarrow P,Q,O$ sunt coliniare $\Rightarrow PQ\perp(ABC)$. **41.** Unghiul celor două plane este $\sphericalangle EOF, \{O\}=AC\cap BD$. Se arată că $EF^2=EO^2+OF^2$, etc. **42.** a) $AD\perp CD$ și $AD\perp AF\Rightarrow d(CD,AF)=AD=a$; b) $AO_1\perp DF$, $AO_1\perp AB\Rightarrow d(AB,DF)=AO_1=\frac{a\sqrt{2}}{2}$; c) Distanța cerută este $MN=\frac{a\sqrt{2}}{4}$, M,N fiind mijloacele segmentelor (OO_1), respectiv (AD). **43.** Fie $AC\cap BD=\{O\}$, $BD\perp AC$ și $BD\perp AM\Rightarrow BD\perp(MAC)$. $BD\cap(MAC)=\{O\}\Rightarrow OE$ este perpendiculara comună a dreptelor MC și BD, E fiind proiecția lui O pe dreapta MC. $d(MC,BD)=OE=\sqrt{2}$. **44.** Fie $MN=d(VD,BC)$, $NP\perp(ABC)$; $MN\perp BC\Rightarrow PM\perp BC$. Fie $MC=x$; triunghiul BMP este isoscel $\Rightarrow BM=10-x\Rightarrow DP=x\sqrt{2}$; $\Delta DNP\sim\Delta DVO\Rightarrow NP=4x$; $MN=\sqrt{17x^2-20x+100}$. Minimul se realizează când $x=\frac{10}{17}$ și $MN=\frac{40}{\sqrt{17}}$. **45.** Se arată că $(BPQ)\parallel(AMN)$. Distanța dintre aceste plane este QN, $BC=10$, $DC=10\sqrt{2}$. Cu teorema catetei: $DQ=\frac{DB^2}{DC}$, $CN=\frac{AC^2}{DC}$ și $QN=DC-CN=\frac{16\sqrt{2}}{5}$. **46.** a) Fie E proiecția punctului M pe planul α, F și G proiecțiile lui E pe Ox respectiv pe Oy. Distingem trei cazuri: 1) $t<90°$, $MF\perp Ox$ și $MG\perp Oy$. ΔMOF și ΔMOG sunt dreptunghice în F, respectiv G, sunt congruente, deci: $\sphericalangle MOF\equiv\sphericalangle MOG\Rightarrow OF=OG$, $\Delta OFE\equiv\Delta OGE\Rightarrow OF=OG\Rightarrow\sphericalangle FOE\equiv\sphericalangle GOE\Rightarrow$ (OE este bisectoarea $\sphericalangle XOY$; 2) $t=90°\Rightarrow E\equiv O$; 3) $t>90°$. În acest caz E aparține bisectoarei unghiului $\sphericalangle X'OY'$, opus la vârf unghiului $\sphericalangle XOY$. b) $OF=OM\cos t$, $OE=\frac{OF}{\cos\frac{u}{2}}$ și $OE=\frac{OM\cos t}{\cos\frac{v}{2}}<OM$ și cum $0°<u<180°\Rightarrow 0°<\frac{V}{2}<90°\Rightarrow\cos\frac{u}{2}>0\Rightarrow\cos t<\cos\frac{v}{2}\Rightarrow t>\frac{u}{2}$, $t\in\left(\frac{v}{2},180°-\frac{v}{2}\right)$. **47.** Mediana relativă la ipoteză este 12, deci produsul catetelor este 144. $AD=AB\cdot\frac{AC}{BC}\Rightarrow AD=6$. a) $m(\sphericalangle(MBC),(ABC))=45°$. b) $d(A,(MBC))=d(A,MD)=3\sqrt{2}$ cm. **48.** a) Deoarece $D'C'\parallel AB$, $ABC'D'$ este o figură plană. b) $BC'\parallel AD'$. Unghiul cerut este $AD'C$ a cărui măsură este de 60°, deci $\Delta D'AC$ este echilateral. c) construim $DM\perp AB$; $tg\,D'MD=\frac{\sqrt{6}}{2}$. **49.** $\{O\}=AC\cap BD$, $PO\perp(ABC)\Rightarrow PO\perp DO$, $BO=DO\Rightarrow BPD$ este triunghi isoscel. $EF\perp AB$ ($O\in EF$)$\Rightarrow EF\perp CD\Rightarrow PE\perp AB$ și $PF\perp CD$. Cum OE și OF sunt egale cu $\frac{3a\sqrt{6}}{4}$, $PE-PF=\frac{3a\sqrt{2}}{2}$. Unghiurile de la pct. c) sunt de 30°. **54.** $m(\sphericalangle EOF)=90°$, unde O este intersecția diagonalelor rombului. **55.** a) $AB\parallel DC\Rightarrow m(\sphericalangle(AB,DF))=m(\sphericalangle(DC,DF))=45°$; $m(\sphericalangle(EF,BD))=m(\sphericalangle(DC,BD))=30°$ ($ABCD$ inscriptibil, AB diametru). $m(\sphericalangle(FC,AD))=90°$. b) Din teorema cosi-

nusului în $\Delta AEC \Rightarrow \cos(AE, EC) = \frac{1}{4}$. Analog $\cos(AE, BF)$; c) $\{P\} = AD \cap BC \Rightarrow m(\sphericalangle APB) =$ $= m(\sphericalangle((ADE),(BGF))) = 60°$. **56.** Fie M mijlocul lui $[BC']$; $CM \perp BC' \Rightarrow CM \perp (BC'D')$. $MN \perp BD'$, $N \in$ $\in BD' \Rightarrow CN \perp BD' \Rightarrow m(\sphericalangle(D'CB), (D'C'B)) = m(\sphericalangle CNM) = 60°$. **57.** a) Se arată că patrulaterul $AEDF$ este inscriptibil. Avem $AD \perp EC$ și $EF \perp AC$, deci măsura celor două unghiuri este 90°. b) $d(M, EF) =$ $= MF = 10\sqrt{10}$; $d(M, CE) = MD = \frac{30\sqrt{70}}{7}$. **58.** a) $m(\sphericalangle(B'C', (CC'M))) = 90°$; b) $\operatorname{tg} u = \frac{\sqrt{21}}{3}$. **60.** Fie MN, $M \in AC$, $N \in BE$, distanța dintre dreptele AC și BE. Fie P piciorul perpendicularei din M pe planul (BCE) și Q piciorul perpendicularei din M pe BC. Conform T.3P. $PN \perp BE$ și $QP \perp BC$. $MC =$ $= x \Rightarrow QC = BQ = \frac{x\sqrt{2}}{2}$, $MQ \perp BC$ și $PQ \perp PC \Rightarrow m(\sphericalangle MQP) = \varphi \Rightarrow MP = MQ\sin\varphi = \frac{x\sqrt{2}}{2}\sin\varphi$. $PQ = MQ\cos\varphi = \frac{x\sqrt{2}}{2}\cos\varphi$, $A_{BEC} = A_{PBC} + A_{PCE} + A_{PBE}$; $PN = \frac{1}{2}\left(\sqrt{2}\,a - x\cos\varphi - x\right)$; $MN =$

$$= \sqrt{MP^2 + PN^2} = \sqrt{\frac{x^2\sin^2\varphi}{2} + \frac{1}{2}\left(x\cos\varphi + x - a\sqrt{2}\right)^2};$$

$$MN = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{\left(\sqrt{2+\sin^2\varphi+2\cos\varphi} - \frac{a\sqrt{2}\,(\cos\varphi+1)}{\sqrt{2+\sin^2\varphi+2\cos\varphi}}\right)^2 + \frac{4a^2\sin^2\varphi}{2+\sin^2\varphi+2\cos\varphi}}.$$

MN trebuie să fie minim. Aceasta se realizează când paranteza de sub radical este zero, adică $MN =$ $= \frac{a\sin\varphi}{\sqrt{\sin^2\varphi + 2\cos\varphi + 2}}$.

CAP. IX. ◆ PRISMA ◆

1. Fie a muchia cubului. $d = a\sqrt{3} \Rightarrow a = 5$, etc. **2.** $4a^2 = 64 \Rightarrow a = 4$. a) $A_t = 96\,\text{cm}^2$; b) $V = 64\,\text{cm}^3$; c) $d = 4\sqrt{3}$ cm. **3.** $a^3 = 216 \Rightarrow a = 6$ cm; a) $A_l = 144\,\text{cm}^2$; b) $A_t = 216\,\text{cm}^2$; c) $d = 6\sqrt{3}$ cm; d) $A_s = 36\sqrt{2}\,\text{cm}^2$. **4.** a) $A_t = 294\,\text{cm}^2$; b) $V = 343\,\text{cm}^3$. **5.** a) $A_l = 324\,\text{cm}^2$; b) $V = 729\,\text{cm}^3$; c) $d = 9\sqrt{3}$ cm. **6.** a) $V = 8\,\text{m}^3$; b) $A_t = 24\,\text{m}^2$; c) $BM =$ $= \sqrt{BC^2 + CM^2} = \sqrt{5}$; $B'M = \sqrt{B'B^2 + BM^2} = 3$; d) $A'M = B'M = 3\,m \Rightarrow A_{A'B'M} =$ $= 2\sqrt{2}\,m^2$, $d(B', A'M) = \frac{2A_{A'B'M}}{A'M} = \frac{4\sqrt{2}}{3}$ m; e) $\sphericalangle[A'M; (ABC)] \equiv \sphericalangle A'MA$; $\sin A'MA =$ $= \frac{AA'}{A'M} = \frac{2}{3}$. **7.** a) $(C'D'B') \perp (D'DB)$, $C'O' \perp D'B' \Rightarrow C'O' \perp (D'DB) \Rightarrow d[C'; (D'DB)] =$ $= C'O' = \frac{a\sqrt{2}}{2}$; b) $B'C \perp BC'$; $B'C \perp D'C' \Rightarrow B'C \perp (BD'C')$. Fie $\{M\} = B'C \cap BC'$ și $MN \perp$ $D'B \Rightarrow d(BC'; BD) = MN$; $\Delta BNM \sim \Delta BC'D' \Rightarrow \frac{MN}{B'C'} = \frac{BM}{BD'} \Rightarrow MN = \frac{a\sqrt{6}}{6}$. **8.** $AB =$ $= x \Rightarrow MN = x\sqrt{2} \Rightarrow A_{NAB} = \frac{x^2\sqrt{2}}{2} = 2a^2\sqrt{2} \Rightarrow x = 2a$. a) $A_t = 24a^2$; b) $V = 8a^3$; c) $NC = \sqrt{NC'^2 + CC'^2} = a\sqrt{5}$; $AD \perp (DCC')$, $DE \perp NC \Rightarrow AE \perp NC$; $DE = \frac{2A_{DNC}}{NC} =$

Scanned with OKEN Scanner

$= \frac{2a\sqrt{5}}{5}$; $AE = \sqrt{AD^2 + DE^2} = \frac{5a\sqrt{3}}{5}$; $A_{ANC} = \frac{NC \cdot AE}{2} = \frac{5a^2\sqrt{15}}{25}$. **9.** a) $B'D = B'A = B'C = AD' = AC = D'C = 6\sqrt{2} \Rightarrow A'B'C'D'$ este tetraedru regulat; $d[B'; (AD'C)] = 2\sqrt{6}$ cm; b) $A_{ABC} = A_{MPN} \cdot \cos\alpha$; $MP = 2\sqrt{10}$ cm. Fie $NQ \perp BB'$ rezultă $NQ \perp (ABB')$. Dacă $QR \perp MP$ rezultă, $NR \perp MP$; $QR = \frac{2A_{MPQ}}{MP} = \frac{3\sqrt{10}}{10}$; $NR = \sqrt{NQ^2 + QP^2} = \frac{3\sqrt{41}}{\sqrt{10}} \Rightarrow A_{MNP} = \frac{MP \cdot NR}{2} =$ $= 3\sqrt{41} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{6\sqrt{41}}{41}$. **10.** a) $A'E = BE = \frac{a\sqrt{5}}{2}$. Fie $EF \perp A'B$, rezultă $EF = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. $A_{A'EB} = \frac{A'B \cdot EF}{2} = \frac{a^2\sqrt{6}}{4}$; b) $d[A; (A'EB)] = \frac{3 \cdot V_{A'ABE}}{A_{A'BE'}} = \frac{a\sqrt{6}}{6}$. **11.** $A_t = 2(ab + ac + bc) = 12\left(\sqrt{6} + \sqrt{2} + \sqrt{3}\right)\text{cm}^2$; b) $V = a \cdot b \cdot c = 36\,\text{cm}^3$; c) $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} =$ $= 6$ cm. **12.** $AC = 5$ cm, $CC' = 5\sqrt{3}$ cm, $A_t = 2\left(12 + 35\sqrt{3}\right)\text{cm}^2$; $V = 60\sqrt{3}\,\text{cm}^3$. **13.** Fie a, b, c dimensiunile paralelipipedului; $\frac{a}{0,4} = \frac{b}{0,3}$, $a^2 + b^2 = 100$, $c = 10 \Rightarrow a = 8$, $b = 6$, $A_t =$ $= 376\,\text{m}^2$; $V = 480\,\text{m}^3$. **14.** $BC \perp (ABA') \Rightarrow (D'BC) \perp (ABA')$. Fie $AM \perp A'B$; $AM \perp (D'BC)$. $AM = 3$; $AB = 2\sqrt{3} \Rightarrow MB = \sqrt{3}$ cm $\Rightarrow A'B = 4\sqrt{3} \Rightarrow AA' = 6$ cm; $V = 144\,\text{cm}^3$. **15.** $A_t = 425\ \text{cm}^2$. **16.** Fie $MN \perp BC$. $A_{MBC} = 5a^2$, $BC = 2a \Rightarrow MN = 5a \Rightarrow A'B = 5a \Rightarrow AA' =$ $= 3a$. a) $V = 24a^3$; b) $B'A' \perp (ADD')$, $A'E \perp AM$, $A'E \subset (ADD') \Rightarrow B'E \perp AM$; $A'E =$ $= \frac{A'M \cdot A'A}{AM} = \frac{3a\sqrt{10}}{10}$ $B'E = \sqrt{B'A'^2 + A'E^2} = \frac{13a\sqrt{10}}{10}$; c) Fie P mijlocul lui $[AD]$; $d[A;$ $(MBC)] = d[P; (MBC)] = PQ\,(PQ \perp MN)$. $PQ = \frac{PM \cdot PN}{MN} = \frac{12a}{5}$. **17.** $EA \perp (ABC)$; ducem $AM \perp BD$ și rezultă $EM \perp BD$; $\left[\widehat{(EBD); (ABD)}\right] \equiv \sphericalangle EMA \Rightarrow \text{m}(\sphericalangle EMA) = 30°$; $AM = \frac{AB \cdot AD}{BD} =$ $= \frac{a\sqrt{6}}{3}$; $\text{tg}\,30° = \frac{AE}{AM} \Rightarrow AE = \frac{a\sqrt{2}}{3}$. a) $V_{EABD} = \frac{A_{ABD} \cdot EA}{3} = \frac{a^3}{9}$; b) $\text{m}\,\sphericalangle[(A'BD); (EBD)] =$ $= \text{m}(\sphericalangle A'ME) = \text{m}(\sphericalangle A'MA) - \text{m}(\sphericalangle EMA) = 30°$; c) $V = \frac{17a^3}{9}$. **18.** Dacă x, y, z sunt dimensiunile paralelipipedului rezultă $A_t = 2(xy + xz + yz)$. Ținând cont de inegalitatea: $xy + xz + yz \le x^2 + y^2 +$ $+ z^2 \Rightarrow A_t \le 8a^2$. **19.** $d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 = 2\left(a^2 + b^2 + c^2\right) = 2d^2 \Rightarrow d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 = d_1d_2 +$ $+ d_1d_3 + d_2d_3 \Rightarrow d_1 = d_2 = d_3 \Rightarrow a = b = c$. **20.** $ab + ac + bc = \frac{(a + b + c)^2 - d^2}{2} =$ $= \frac{(a + b + c - d)(a + b + c + d)}{2} \Rightarrow \frac{ab + ac + bc}{a + b + c + d} = \frac{a + b + c - d}{2}$. Cum $d^2 = a^2 +$ $+ b^2 + c^2 \Rightarrow d$ și $(a + b + c)$ au aceeași paritate; deci: $(a + b + c - d) \vdots 2$. **21.** Latura bazei este $2a$ și înălțimea $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. **22.** Deoarece fețele laterale au diagonalele egale, rezultă că acestea sunt drep-tunghiuri și deci paralelipipedul este drept. $A_t = 288\,\text{cm}^2$; $V = 288\,\text{cm}^3$. **23.** $h = 2a$. a) $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{3}$; b) $A_{A'BD} = \frac{BD \cdot A'O}{2} = \frac{a^2\sqrt{51}}{4}$ $(\{O\} = AC \cap BD)$; c) $(A'AO) \perp (A'BD)$, $AM \perp A'O \Rightarrow$

Scanned with OKEN Scanner

$\Rightarrow A'M \perp A'O$; $A'M = \frac{2a\sqrt{17}}{17}$. **24.** $A_t - A_l = 2A_b = 16\,m^2$; rezultă că latura bazei este 4 m. $A_l = P_b \cdot h \Rightarrow h = 5$ m; $V = 80\,m^3$. **25.** Fie a latura bazei și h înălțimea. $\left.\begin{matrix} a^2h = 150 \\ 4ah = 120 \end{matrix}\right\} \Rightarrow a = 3$; $= 6$, $d = \sqrt{a^2 + a^2 + h^2} = \sqrt{86}$ m. **26.** a) 22; b) $168\sqrt{2}\ cm^2$; c) $A_t = 960\,cm^2$; $V = 2016\,cm^3$. **27.** $l = 3\sqrt{2}$ cm; $A_t = \left(48\sqrt{2} + 36\right) cm^2$; $V = 72\,cm^3$. **28.** $h = 8$ cm; $A_l = 144\,cm^2$; $V = = 72\sqrt{3}\ cm^3$. **29.** $r = \frac{a\sqrt{3}}{6} \Rightarrow a = 12$ cm; $V = 360\sqrt{3}\ cm^3$. **30.** $R = \frac{a\sqrt{3}}{3} \Rightarrow a = 6$; $\frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot h = 135 \Rightarrow h = 5\sqrt{3}$ cm; $A_t = 108\sqrt{3}\ cm^2$. **31.** Prelungim CB cu $[BD] \equiv [CB]$; $BDB'C$ paralelogram $\Rightarrow BD \parallel C'B \Rightarrow \sphericalangle(BC'; B'A) \equiv \sphericalangle(DB'A) \Rightarrow \Delta B'AD$ echilateral rezultă $B'A = = AD = a\sqrt{3} \Rightarrow BB' = a\sqrt{2} \Rightarrow V = \frac{a^3\sqrt{6}}{4}$. **32.** $AA' \perp (ABC)$; ducem $AD \perp BC$ și rezultă $A'D \perp \perp BC$. $\left.\begin{matrix} m(\hat{A'DA}) = 30^\circ \\ AD = 3\sqrt{3} \end{matrix}\right\} \Rightarrow AA' = 3$ cm. $A_t = 18\left(\sqrt{3} + 3\right) cm^2$. **33.** $AA' = a\sqrt{3}$. a) $A_t = \frac{7a^2\sqrt{3}}{2}$; $V = \frac{3a^3}{4}$; b) $P_{AB'C} = 5a$; $A = \frac{a^2\sqrt{15}}{4}$; c) $\frac{\sqrt{5}}{5}$. **34.** $A'B \perp AC'$, $A'B \perp B'C' \Rightarrow$ $\Rightarrow A'B \perp (AB'C') \Rightarrow A'B \perp AB' \Rightarrow ABB'A'$ - pătrat, (1). $BD \perp AC'$, $BD \perp CC' \Rightarrow BD \perp (ACC') \Rightarrow$ $\Rightarrow BD \perp AC \Rightarrow ABCD$ - pătrat, (2). Din (1) și (2) rezultă $ABCDA'B'C'D'$ - cub. **35.** Notăm $AA' = x$. $MD'^2 = \frac{x^2}{4} + 36$; $MN^2 = \frac{x^2}{4} + 9$; $D'N^2 = x^2 + 9$. $\Delta D'MN$ - dreptunghic $\Leftrightarrow D'N^2 = D'M^2 +$ $+ MN^2 \Leftrightarrow x = 6\sqrt{2}$. În ΔMAC: $MC^2 = MA^2 + MC^2 \Rightarrow MC = \sqrt{118}$; în $\Delta C'CN$: $NC'^2 =$ $= CC'^2 + CN^2 \Rightarrow NC' = \sqrt{145}$; $CO = \frac{C'N}{2} = \frac{\sqrt{145}}{2}$. $C'D' \perp (ADD')$, $D'M \perp MN$; $D'M$, $MN \subset (ADA') \Rightarrow C'M \perp MN \Rightarrow MO = \frac{\sqrt{145}}{2}$. Fie $OP \perp MC$; *rezultă* $OP = \sqrt{OC^2 - PC^2} =$ $= \frac{3\sqrt{3}}{2}$. $A_{OMC} = \frac{MC \cdot OP}{2} = \frac{3\sqrt{354}}{4}\ cm^2$. **36.** Fie a, b, c dimensiunile paralelipipedului; $a^2 +$ $+ b^2 = 36$, $a^2 + c^2 = 64$, $b^2 + c^2 = 72$; a) $d^2 = a^2 + b^2 + c^2 = 86 \Rightarrow d = \sqrt{86}$ cm; b) $V =$ $= 10\sqrt{154}\ cm^3$. **37.** $V = 8\,cm^3$. Deci cubul poate fi împărțit în 8 cuburi cu muchia de 1 cm. Având 9 puncte, rezultă că cel puțin două dintre ele sunt în interiorul aceluiași cub și deci distanța dintre ele este mai mică decât diagonala care are lungimea $\sqrt{3}$ cm. **38.** $a + b + c = 9$; $V = a \cdot b \cdot c$; $\sqrt{abc} \le \frac{a+b+c}{3} \Rightarrow \sqrt{abc} \le 3 \Rightarrow V \le 27\,cm^3$. **39.** $a \cdot b \cdot c = 8$, $A_t = 2(ab + ac + bc)$, $\frac{ab+ac+bc}{3} \ge \sqrt[3]{a^2b^2c^2} \Rightarrow A_t \ge 12$. **40.** $AC'^2 = AB^2 + BC^2 + CC'^2 \Rightarrow CC' = 6$ m; a) $V = 288\,cm^3$; b) $OC' = 2\sqrt{19}$ m; c) Fie $OM \perp AC'$; $\Delta AMO \sim \Delta ACC' \Rightarrow \frac{OM}{CC'} = \frac{AO}{AC'} \Rightarrow$ $\Rightarrow OM = \frac{3\sqrt{10}}{7}$ m. **41.** a) $A_l = P_b \cdot h \Rightarrow h = 6$ cm; $V = A_b \cdot h = 192\sqrt{3}\ cm^3$; b) $(A'AO) \perp$ $\perp DB \Rightarrow (A'AO) \perp (A'DB)$. Fie $AM \perp A'O$; rezultă $AM \perp (A'DB)$. $AM = \frac{AO \cdot AA'}{A'O} = \frac{12\sqrt{7}}{7}$ cm.

Scanned with OKEN Scanner

42. a) $[MN]$ este linie mijlocie în $\Delta BAC' \Rightarrow MN \parallel AC' \Rightarrow (MB'C) \parallel AC'$; b) $MN = \sqrt{3} \Rightarrow AC = 2\sqrt{3} \Rightarrow AB = 2$. $A_{MB'C} = \frac{B'C \cdot MN}{2} = \sqrt{6}$ cm^2. **43.** $AA' \perp (ABC)$ și ducem, $AD \perp BC$; rezultă $A'D \perp BC$ și $m(\sphericalangle A'DA) = 60°$; $BC = 50$ cm; $AD = 24$ cm, $AA' = 24\sqrt{3}$ cm; $A_l = P_b \cdot h = 2880\sqrt{3}$ cm^2; $V = A_b \cdot h = 14400\sqrt{3}$ cm^3. **44.** $A_l = P_b \cdot h \Rightarrow P_b = 6a \Rightarrow AD = BC = \frac{3a}{2}$; $V = \frac{3a^3\sqrt{2}}{2}$. **45.** a) $D'M, BN, DB' \subset (BDD')$, $D'M \perp B'D$, $BN \perp B'D \Rightarrow D'M \parallel BN$, (1);

$$\left.\begin{aligned} D'M &= \frac{DD' \cdot B'D'}{B'D} = \frac{a\sqrt{6}}{3} \\ BM &= \frac{BB' \cdot BD}{B'D} = \frac{a\sqrt{6}}{3} \end{aligned}\right\} \Rightarrow [D'M] \equiv [BN]$$

, (2). Din (1) și (2) rezultă: $D'MBN$ - paralelogram. b) $B'D'^2 = B'M \cdot B'D \Rightarrow B'M = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$; $BB'^2 = B'N \cdot B'D \Rightarrow B'N = \frac{a\sqrt{3}}{3}$; $\frac{MN}{B'D} = \frac{1}{3} \Rightarrow MN = \frac{B'D}{3}$. **47.** Prelungim BC cu $[BD] \equiv [BC]$; avem: $B'D \parallel C'B \Rightarrow m(\sphericalangle DB'A) = 90°$. Triunghiul DAC - dreptunghic în $\sphericalangle A \Rightarrow DA = a\sqrt{3}$; $DA^2 = DB'^2 + AB'^2 \Rightarrow 3a^2 = 2AB'^2 \Rightarrow$ $\Rightarrow AB' = \frac{a\sqrt{6}}{2} \Rightarrow AA' = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. Prelungim $B'C'$ cu $[C'D'] \equiv [C'B']$ și avem

$$\left.\begin{aligned} A'D' &= a\sqrt{3} \\ CD' &= A'C = \frac{a\sqrt{6}}{2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow A'D'^2 = A'C'^2 = A'C^2 + CD'^2 \Rightarrow A'C \perp CD' \Rightarrow A'C \perp BC'.$$

$V = \frac{a^3\sqrt{6}}{8}$, $A_t = \frac{3a^2\sqrt{2}}{2} + \frac{2a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^2\left(3\sqrt{2} + \sqrt{3}\right)}{2}$.

CAP. X. • PIRAMIDA •

3. 6 muchii ale bazei, 6 muchii laterale, 7 vârfuri. **4.** a) trei; b) patru. **5.** Nu. Deoarece numărul muchiilor laterale este egal cu numărul muchiilor bazei, numărul total de muchii trebuie să fie par. **6.** a) 4096 cm^2; b) 20 cm; c) 2304 cm^2. **7.** 15 cm. **8.** a) $\frac{32}{3}$ cm^3; b) $16\left(1 + \sqrt{2}\right)$ cm^2; c) $45°$. **9.** a) $60°$; b) $90°$. **10.** $\frac{500\sqrt{6}}{3}$ cm^3. **11.** a) se mărește de două ori; b) se micșorează de 3 ori; c) rămâne neschimbat. **12.** 972 cm^3; $324\left(1 + \sqrt{2}\right)$ cm^2. **14.** 12 cm^2. **15.** $18\left(3 + \sqrt{3}\right)$ cm^2. **17.** $60°$. **18.** $d_1 \parallel AB$ și $d_2 \parallel BC$. **19.** a) $27\sqrt{3}$ cm^2; b) 4 cm; c) 5 cm; d) $72\sqrt{3}$; e) $14 + 2\sqrt{13}$ cm; 18 cm^2. **20.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$. **21.** 3. **22.** În triunghiul VMN lungimea medianei din V este jumătate din lungimea laturii corespunzătoare, deci triunghiul este dreptunghic. **23.** Se arată că $[MN] \equiv [MQ]$, deci în triunghiul MNQ mediana $[MO]$ este și înălțime, etc. **24.** $18\sqrt{2}$ cm^3. **25.** $144\sqrt{2}$ cm^3. **26.** $\frac{243\sqrt{2}}{4}$ cm^3; $81\sqrt{3}$ cm^2. **27.** 3. **28.** Sunt egale. **29.** $300\sqrt{3}$ cm^3; $270\sqrt{3}$ cm^2. **30.** $2400\sqrt{3}$ cm^3; $1080\sqrt{3}$ cm^3. **31.** Notăm cu a lungimea muchiei tetraedrului, $A_{BCM} = \frac{a^2\sqrt{2}}{4}$

Scanned with OKEN Scanner

și obținem $a = 6$. Aria totală este $36\sqrt{3}$ cm^2. **32.** $\frac{27}{2}$. **33.** Notăm vârful piramidei cu S, iar baza piramidei o notăm cu $MNPQ$, $A' \in (SM)$, $B' \in (SN)$, $C' \in (SP)$, $D' \in (SQ)$. Arătăm că $A, C \in (MP)$, $B, D \in (NQ)$. Notăm cu O și O' centrele pătratelor $ABCD$ și $A'B'C'D'$. Notăm $AB = x$ și folosind asemănarea triunghiurilor $SA'O'$ și SMO găsim $x = 4$. **34.** a) $432\sqrt{3}$ cm^3 ; b) $48\sqrt{3}$ cm^2. **35.** Dacă O este proiecția lui S pe planul AEF, pătratul $ABCD$ și triughiul echilateral AEF sunt înscrise în cercul de centru O și rază OA. Raportul volumelor este $\frac{8\sqrt{3}}{9}$. **36.** a) $MN \parallel DC$, $MP \parallel BC$, $NP \parallel AB$ deci $\frac{AM}{MB} = \frac{AP}{PC} = = \frac{BN}{NC} = \frac{BM}{AM}$ de unde rezultă $AM = BM$; b) 4. **37.** a) $3600\left(2\sqrt{3} - 3\right)$ cm^2 ; b) $30\left(\sqrt{3} - 1\right)$cm^2. **38.** $\frac{2\sqrt{6}}{9}$. **39.** b) $\frac{1}{12}$. **40.** Notăm cu $A_1A_2 \ldots A_n$ baza, iar cu V vârful. Fie O proiecția lui V pe planul bazei. Din congruența triunghiurilor VOA, VOA_2, ..., VOA_n rezultă $[OA_1] \equiv [OA_2] \equiv \ldots \equiv [OA_n]$, deci O este centrul cercului circumscris poligonului regulat $A_1A_2 \ldots A_n$. **41.** a) Fie M mijlocul lui $[AB]$. Demonstrăm că $OM \perp AB$. Fie punctul $T \in (MO$ așa încât $[MT] \equiv [MS]$. Cum $MS > MO$ rezultă $O \in (MT)$. $m(\sphericalangle AOB) = m(\sphericalangle AOM) + m(\sphericalangle BOM) > m(\sphericalangle ATM) + m(\sphericalangle BTM) = m(\sphericalangle ATB) = m(\sphericalangle ASB)$. b) c) Se aplică punctul a). **42.** a) $\Delta ABM \equiv \Delta DBM$ și $\Delta ADN \equiv \Delta BDN$; b) Arătăm că $MN < MD$ comparând unghiurile care se opun acestor laturi în triunghiul DMN; c) În triunghiul AMN latura $[MN]$ este cea mai mică deci unghiul MAN este mai mic. **43.** Planul secțiunii trebuie să taie planul bazei după o dreaptă perpendiculară pe două laturi opuse ale poligonului bazei. Aria secțiunii este $A = ah$ unde a este apotema bazei, iar h este înălțimea piramidei. Obținem $A = 30$ cm^2. **44.** a) 12 vârfuri, 24 muchii, 14 fețe. b) $\frac{5a^3}{6}$; $a^2\left(3 + \sqrt{3}\right)$. **46.** a) Demonstrăm că proiecțiile lui A', B', ... , F' pe OS coincid. b) $\frac{a^3 \cdot 3^4}{2^7}$.

47. Notăm $AB = x$, $AC = y$, $AD = z$. Rezolvând sistemul: $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ x^2 + z^2 = 34 \\ y^2 + z^2 = 41 \end{cases}$, obținem $x = 3$; $y = 4$; $z = 5$; $V = 10$ cm^3. **49.** Folosind teorema bisectoarei și reciproca teoremei lui *Thales*, arătăm că $EF \parallel BD$. **50.** $\Delta SAB \sim \Delta SB'A' \Rightarrow SA \cdot SB'$; $\Delta SBC \sim \Delta SC'B' \Rightarrow SB \cdot SB' = SC \cdot SC'$. Prin tranzitivitate rezultă $SA \cdot SA' = SC \cdot SC'$ de unde deducem că $\Delta SAC \sim \Delta SC'A'$ ceea ce implică faptul că $ACC'A'$ este inscriptibil. **51.** a) Fie O proiecția lui V pe $(ABCD)$. Se arată că $[OA] \equiv [OB] \equiv [OC] \equiv [OD]$. Trapezul este inscriptibil, deci este isoscel. b) Fie E intersecția laturilor neparalele ale trapezului. Dreapta a trece prin V și este paralelă cu AB, iar dreapta b este dreapta determinată de punctele V și E; se demonstrează că $VE \perp AB$. **52.** Se arată că distanța în linie dreaptă pe desfășurarea suprafeței laterale între A și mijlocul lui $[SC]$ este $10\sqrt{3}$, etc.

CAP. XI. ◆ TRUNCHIUL DE PIRAMIDĂ ◆

1. a) 12 muchii și 6 fețe. **2.** a) 5 fețe și 6 vârfuri. **3.** Nu, deoarece la fiecare trunchi de piramidă numărul de muchii este divizibil cu 3 (dacă baza este poligon cu n laturi, trunchiul de piramidă are $3n$ muchii). **4.** a) 3; b) 4. **5.** 21 cm^3. **6.** 4 cm; 1 cm. **7.** a) $45 + 27\sqrt{3}$ cm^2 ; b) 3 cm; c) 60°; d) 45°. **8.** a) $5856\sqrt{3}$ cm^3; b) $216\sqrt{39}$ cm^2. **9.** 32 cm^3. **10.** 190 cm^3. **11.** 8 cm. **12.** $\frac{91\sqrt{3}}{12}$ cm^3 ;

Scanned with OKEN Scanner

$\frac{49\sqrt{3}}{6}$ cm^3. **13.** $\frac{1216}{27}$ cm^3. **14.** a) Fie O intersecția diagonalelor pătratului $ABCD$. Demonstrăm că AM, BN, CP și DT taie OQ în același punct care este simetricul lui O față de Q; b) 144 cm^3; c) 126 cm^3. **15.** 560 cm^2; 448 cm^3. **16.** $\Delta B'MN \sim \Delta B'AC$, $\Delta MAB \sim \Delta MB'A' \Rightarrow MN = \frac{ab\sqrt{2}}{a+b}$. **17.** $\frac{171\sqrt{2}}{4}$ cm^3. **18.** 96 cm^2. **19.** a) b) CO taie pe $[AB]$ în M, iar $C'O'$ taie pe $[A'B']$ în M'. M și M' sunt mijloacele segmentelor $[AB]$ și $[A'B']$. Cum $AB \parallel A'B'$, $MC \perp AB$, $M'C' \perp A'B'$ rezultă $MC \parallel M'C'$. Cum $MO = 2MO'$, MM' taie OO' în punctul S, simetricul lui O, față de O' și deoarece $OC = 2O'C'$ și CC' și OO' se taie tot în S. Ținând seama că M' este mijlocul lui $[MS]$, $MB \parallel M'B'$ și $MB = 2M'B'$ se arată că $S \in BB'$ și analog $S \in AA'$. Planul SAC taie planele α și β după $AC \parallel A'C'$. Analog $BC \parallel B'C'$; c) $315\sqrt{3}$ cm^3. **20.** Punctul în care înălțimea trunchiului de piramidă taie planul mediator al uneia dintre muchiile laterale este egal depărtat de toate vârfurile.

CAP. XII. ◆ CORPURI ROTUNDE ◆

§ 1. ● Cilindrul ●

1. $A_l = 182\pi$ cm^2, $A_t = 280\pi$ cm^2, $V = 637\pi$ cm^3. **2.** a) $G = 8$ cm; b) $A_l = 32\pi$ cm^2; c) $V = 32\pi$ cm^3. **3.** a) $R = 8$ cm; b) $G = 16$ cm; c) $A_l = 256\pi$ cm^2; d) $V = 1024\pi$ cm^3. **5.** $A_l = 75\sqrt{3}\pi$ cm^2, $A_t = \frac{150\sqrt{3}+49}{2} \cdot \pi$ cm^2, $V = \frac{245\sqrt{3}\pi}{4}$ cm^3. **6.** a) $A_l = 45\pi$ cm^2; b) $A_t = 63\pi$ cm^2; c) $V = \frac{135\pi}{2}$ cm^3. **7.** Sunt două posibilități în prisma $G = 6\sqrt{\pi}$ cm, în a doua $G = 6\sqrt{3\pi}$ cm. **8.** a) $A_l = 60\pi$ cm^2; b) $A_t = 132\pi$ cm^2; c) $V = 180\pi$ cm^3. **9.** a) $A_l = 120\pi$ cm^2; b) $\sqrt{100 + 144\pi^2}$; c) $V = 360\pi$ cm^3. **10.** $2RG = \pi R^2 \Rightarrow 2G = R\pi$ deci, rezultă că: $20G = 31,4 \cdot R > 31R$. **11.** $G = 13$. **12.** $R = 5$ cm, $G = \frac{10\sqrt{3}}{3}$ cm. **13.** $V = 107,1875$ cm^3. **14.** 50 cm^2. **15.** Înălțimea cutiei va fi de 28 cm, iar volumul 1372π cm^3. **16.** Dacă burlanul are generatoarea de 80 cm volumul său va fi $\frac{288000}{\pi}$ cm^3. Dacă generatoarea este de 120 cm volumul va fi $\frac{192000}{\pi}$ cm^3. **17.** $\sqrt{225 + \frac{81}{4}\pi^2}$; $\sqrt{225 + 81\pi^2}$. **18.** $MNPQ$ va fi trapez isoscel cu înălțimea $5 \cdot \sqrt{39 + 2\sqrt{2}}$. **19.** $\approx 477,594$ g. **20.** $A_l = 450\pi$ cm^2; $A_t = 900\pi$ cm^2; $V = 3375\pi$ cm^3. **21.** 1. **22.** Lungimea drumului $PE = \sqrt{9\pi^2 + 4} + \sqrt{36\pi^2 + 16} = 3\sqrt{9\pi^2 + 4}$. **24.** $A_{\text{sect. ax}} = 2r^2\sqrt{3}$; $A_l = 2r^2\sqrt{3} \cdot \pi$; $V = \pi \cdot r^2\sqrt{3}$. **25.** $A_t = 24\pi + 32\pi\sqrt{3}$; $d = \sqrt{48\pi^2 + 64}$; $V = 96\pi$.

§ 2. ● Conul ●

1. $A_l = 260\pi$ cm^2; $V = 800\pi$ cm^3. **2.** a) $A_b = 900\pi$ cm^2; b) $A_l = 1020\pi$ cm^2; c) $V = 4800\pi$ cm^3. **3.** $V = \frac{50\pi\sqrt{14}}{3}$, $A_{\text{sect ax}} = 10\sqrt{14}$ cm^2. **5.** $A_t = 108\pi$ cm^2, $V = 144\pi$ cm^3.

Scanned with OKEN Scanner

7. $A_t = 100\pi\left(3+2\sqrt{3}\right)$ cm^2, $V = 1000\pi$ cm^3. **9.** 6 cm. **10.** $V = \frac{2197\sqrt{3}\,\pi}{3}$ cm^3, $A_{sect.ax} = 169\sqrt{3}$ cm^2. **12.** 300°. **13.** $V = \frac{81\pi\sqrt{55}}{8}$. **14.** $A_t = 450\pi\left(1+\sqrt{2}\right)$ cm^2. **15.** Volumul conului obținut prin înfășurarea conului din figura a) este $V_a = \frac{125\sqrt{15}}{24}\pi$, iar $V_b = \frac{125\sqrt{35}}{81}\pi$ avem $V_b > V_a$. **16.** $R = 6$ dm. **17.** $R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$, $h = \frac{a\sqrt{6}}{3}$. **18.** 300°. **19.** Din $\pi R^2 = \pi \cdot r \cdot g$ și $\frac{r}{R} = \frac{g}{G}$ rezultă $g^2 = G \cdot R$. **20.** Raza conului care se obține este $R = \frac{r\left(1+\sqrt{2}\right)}{4}$, generatoarea este $G = r\left(1+\sqrt{2}\right)$ și înălțimea $h = \frac{r}{4}\left(1+\sqrt{2}\right)\cdot\sqrt{15}$. **21.** $12\sqrt{5}$ cm. **22.** Dacă VAB este secțiunea axială, N mijlocul lui VA și O centrul bazei, avem $\Delta VNM \sim \Delta VOA$.... **23.** Corpul obținut este format din două conuri care au baza comună. **25.** $V = \frac{2a^3\sqrt{3}}{27}\pi$.

§ 3. ● Trunchiul de con ●

1. a) $A_l = 40\pi\sqrt{2}$, $A_t = 40\pi\sqrt{2} + 58\pi$, $V = \frac{316}{3}\pi$. **2.** Se obține $r = 12$ cm. **3.** $A_l = 2835\pi$ cm^2, $V = 37908\pi$ cm^3. **5.** $r = 6$ cm, $R = 18$ cm. **6.** a) $84\sqrt{3}$ cm^2; b) $A_l = 168\pi$ cm^2; c) $V = 312\sqrt{3}\,\pi$ cm^3. **7.** a) Înălțimea trunchiului este de 13 cm. $A_l = 13\sqrt{178}\cdot\pi$ cm^2, $V = 559\pi$ cm^3; b) $V_{con} = \frac{4160}{9}\pi$ cm. **9.** $R = 5$; $r = 2{,}5$; $G = 5$. **10.** $R = 8$; $r = 3$. **11.** $V = \frac{3965\sqrt{15}\cdot\pi}{96}$ cm^3. **14.** $V \simeq 15$ l; $\simeq 314$ cm^2. **15.** $G = R + r$; $R + r = 2a$; $R - r = a\sqrt{3}$.

§ 4. ● Sfera ●

1. $A = 900\pi$ cm^2, $V = 4500\pi$ cm^3. **2.** $R = 25$ cm. **3.** 324π cm^2. **4.** $R = 6$, $A = 144\pi$, $V = 288\pi$. **5.** 288π cm^2. **6.** $A = 676\pi cm^2$, $V = \frac{8788}{3}\pi$ cm^3. **7.** 75 m. **8.** $A = 400\pi$ cm^2, $V = \frac{4000}{3}\pi$ cm^3. **9.** Două soluții $4\sqrt{5} - 2\sqrt{11}$ și $4\sqrt{5} + 2\sqrt{11}$. **10.** $R = 5\sqrt{3}$. **11.** $AB^2 = BC^2 + AC^2$; raza sferei este de 290 cm. **12.** $\frac{75\sqrt{15}}{4}$ cm. **13.** $V = \frac{8092}{3}\pi$ cm^3, $A = 578\pi$ cm^2. **14.** $A_1 = \frac{2\pi r^2\sqrt{3}}{3}$, $A_2 = \frac{2\pi r^2\left(6-\sqrt{3}\right)}{3}$. **15.** Raza balonului este $\frac{1201}{384}$.

§ 5. ● Probleme diverse ●

1. $V = 4800$ cm^3. **3.** Raza sferei este: $R\cdot\sqrt{\frac{r}{2R-r}}$. **6.** Conurile având bazele congruente, rezultă că au și înălțimile congruente. **9.** $A_t = \left(80\sqrt{11}+200\right)\pi$ cm^2, $V = 400\sqrt{11}\,\pi$ cm^3. **11.**

Scanned with OKEN Scanner

$A_t = \frac{26\pi r^2}{3}$; $V = \frac{26r^3\pi}{9}$. **13.** $G = \frac{R\left(R^2+9\right)}{R^2-9}$. **14.** $r = R \cdot \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$. **15.** $r = 2\sqrt{3}-3$.

* * *

Scanned with OKEN Scanner

PROBLEME DE MATEMATICĂ PENTRU ELEVII CLASELOR V-VIII

Organizată pe clasele ciclului gimnazial, împărțită pe capitole, lucrarea acoperă, prin cele **peste 2000 de probleme propuse**, întreaga programă actuală de matematică, fiind astfel un instrument util în fixarea noțiunilor din clasă.

Lucrarea se adresează tuturor **elevilor din clasele V-VIII** oferind în fiecare capitol *un număr mare de probleme dispuse gradat, începând cu problemele de mică dificultate și ajungând până la probleme mai dificile* în finalul fiecărui capitol.

Pentru elevii care se pregătesc în vederea susținerii examenului de admitere în liceu sunt propuse **teste de admitere** reprezentând *posibile subiecte pentru examenele de admitere în liceu.*

AUTORII

I.S.B.N. 973-97283-7-5

LEI 25 000

Scanned with OKEN Scanner